N° d'ordre : A.O 7.868

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

AIX-MARSEILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacques VIVOLI

VIBRATIONS DE PLAQUES ET POTENTIELS DE COUCHES

Soutenue le 30 novembre 1972 devant la Commission d'Examen

MM. P. CASAL
R. BOUDET
Y. JULLIEN
R. LEGENDRE
Th. VOGEL

} Membres du Jury

N°d'ordre : A.O 7.868

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

AIX-MARSEILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacques VIVOLI

VIBRATIONS DE PLAQUES ET POTENTIELS DE COUCHES

Soutenue le 30 novembre 1972 devant la Commission d'Examen

MM. P. CASAL
R. BOUDET
Y. JULLIEN
R. LEGENDRE
Th. VOGEL

} Membres du Jury

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A Monsieur Vogel

Hommage reconnaissant

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545827_0020

UNIVERSITE DE PROVENCE

U.E.R. Scientifiques

Président : F. BOREL

Secrétaire général : C. MOYNAULT

PROFESSEURS

MM.	J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
	P. ROUARD	Physique générale
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	M. MERIGOUX	Physique industrielle
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
	A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	G. CARPENI	Chimie
	Y. DOUCET	Physique
	JM. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	J. METZGER	Chimie
	L. FOURES	Mathématiques
	D. MALE	Physique
	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	M. NAUDET	Chimie des corps gras
	P. BOUSQUET	Physique
	P. PESTEIL	Physique
	P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
	G. GOUVERNET	Géologie appliquée
	A. VISCONTI	Physique théorique
	A. BLANCHARD	Mathématiques générales

M. DUSSARDIER	Physiologie animale
P. QUEZEL	Botanique
E. CRAUSSE	Physique (Avignon)
A. JULG	Chimie théorique
S. TAXY (Mme)	Géologie historique
F. TESSIER	Géologie générale
ML. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale
M. BERTRAND	Chimie
J. TROMPETTE	Physique
M. LAFFITTE	Chimie
R. FRAISSE	Mathématiques
C. BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
R. NEGRE	Biologie végétale
R. COULON	Physique
R. KERN	Minéralogie
L. SIDERIADES	Physique
JM. SURZUR	Chimie organique
H. CHANTREL	Physique de l'espace
J. SOUGY	Géologie
J. HERVE	Electronique
H. BODOT	Chimie
J. CHOUTEAU	Physiologie animale
R. PHILIP	Physique
L. CAPELLA	Minéralogie
P. BILLARD	Mathématiques
M. BONNEAU	Mathématiques
JC. TRAYNARD	Chimie industrielle
C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides
A. PONS	Botanique
A. GIRARDIE	Zoologie
JC. MAIRE	Chimie
M. SIMON	Physiologie animale
J. MANDELBROJT	Physique
JP. DAVID	Physique
M. BIZOUARD	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

R. AMAR	Zoologie
L. DEVEZE	Biologie marine
F. BOREL	Techniques mathématiques de la physique
R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
H. GUENOCHE	Mathématiques appliquées
F. PECAUT (Mme)	Mathématiques (Avignon)
J. HENNEQUIN	Electronique
S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
C. FEUGEAS	Chimie
J. CABANE	Chimie
G. RASIGNI	Physique
S. COMBET	Chimie
R. GARRON	Physique expérimentale
M. CADILHAC	Physique
B. WAEGELL	Chimie
G. MARCHIS-MOUREN	Chimie biologie
F. HALBWACHS	Physique (Avignon)
R. PETIT	Physique
M. HUGON	Psycho-physiologie
M. PICHENOT (Mlle)	Biologie végétale
M. GILLET	Physique
JP. ROGGERO	Chimie (Avignon)
L. SARDA	Biochimie
C. ROMAN	Physiologie animale
A. GILLET	Mathématiques
S. MARTINUZZI	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

H. PATIN	Chimie
J. CRESP	Biologie animale
M. BENARROCHE	Physique

H. TACHOIRE	Chimie
E. VINCENT	Chimie
L. VICENTE	Biologie animale
J. MANUCEAU	Mathématiques
R. GUERMEUR	Physique
M. DELAAGE	Biochimie
F. CATZIGRAS (Mlle)	Géologie
M. SIRUGUE (Mme)	Physique
H. MERDY	Physique
L. PUJOL	Chimie
A. LAVAGNE	Biologie végétale
J. GIUDICELLI	Biologie animale
M. FOUGEREAU	Biochimie
G. NOAT	Physiologie végétale
R. BOUDET	Mathématiques
R. STREIFF	Chimie
JP. BELAICH	Microbiologie
P. NEVILLE	Biologie végétale
JP. SOUBLIN	Mathématiques
S. DELACHE (Mme)	Mathématiques
C. FARDOUX	Chargé d'enseignement - Mathématiques
B. MORIN	Chargé d'enseignement - Mathématiques
B. BALLET	Chargé d'enseignement - Mathématiques (Avignon)

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Th.Vogel Directeur du Centre de Recherches Physiques, pour la confiance et les conseils qu'il n'a pas cessé de me prodiguer durant ce travail.

Que Monsieur R.Legendre, Directeur de l'O.N.E.R.A., Membre de l'Institut, trouve là l'expression de ma respectueuse reconnaissance pour l'intérêt qu'il à pris pendant l'élaboration de ma thèse.

Je remercie Monsieur Y.Jullien pour l'enseignement et les encouragements qu'il ma constamment donné dans son service.

Je remercie Messieurs P.Casal et R.Boudet, Professeurs à l'Université de Provence, qui ont accepté de juger ce travail.

Je regrette que Monsieur P.Filippi, actuellement retenu aux Etats Unis, ne puisse faire partie de mon Jury de thèse, car il a su me donner les idées essentielles pour l'application des potentiels de couches à ce travail.

Je remercie également Mademoiselle C.Michet de la Baume pour l'aide qu'elle m'a apporté pour le traitement numérique du problème, Monsieur R.Devèze pour la partie expérimentale.

TABLE DES MATIERES

RESUME 1

INTRODUCTION 3

CHAPITRE 1

Equation des plaques minces vibrant en flexion - Notion d'Energie - Existence et unicité de la solution - Conditions aux limites.

1.1.- Notion d'énergie 8
1.2.- Existence et unicité de la solution 10
1.3.- Conditions aux limites 13

CHAPITRE 2

Potentiels de couches et équations intégrales - Propriétés des potentiels de couches - Equivalence entre la formulation différentielle et la formulation intégrale du problème des plaques.

2.1.- Potentiels de couches et équations intégrales ... 20
2.1.1.- Solution élémentaire de l'opérateur des plaques 20
2.1.2.- Définition des potentiels de couches 21
2.1.3.- Equations intégrales du problème 21

2.2.- Propriétés des potentiels de couches 23
2.2.1.- Discontinuité des potentiels de couches d'ordre 0 à 3 23
2.2.2.- Trace des potentiels de couches d'ordre 0 et 3 et de leurs dérivées normales jusqu'à l'ordre 3 25

2.3.- Equivalence entre la formulation différentielle et la formulation intégrale du problème des plaques 26
2.3.1.- Unicité de la solution des problèmes extérieurs 27

2.3.2.- Existence de la solution des problèmes extérieurs 28
2.3.3.- Equivalence entre le système d'équations intégrales (2.7) et le système différentiel (2.6) et (2.6') 30

CHAPITRE 3

Schéma général de résolution d'un problème de plaque par la méthode des potentiels de couches - Méthode de discrétisation - Problèmes à conditions aux limites uniforme, problèmes à conditions aux limites mêlées - Expressions analytiques des coefficients A_{ij} du système linéaire.

3.1.- Schéma général de résolution d'un problème de plaque par des potentiels de couches 35
3.2.- Méthode de discrétisation 39
3.3.- Problèmes à conditions aux limites uniformes, problèmes à conditions aux limites mêlées 41
3.3.1.- Problème des valeurs propres d'une plaque à conditions aux limites uniformes sur tout le contour 43
3.3.2.- Problème des valeurs propres d'une plaque à conditions aux limites mêlées . 44
3.4.- Expressions analytiques générales des coefficients A_{ij} du système linéaire 47
3.4.1.- Notations et formules de dérivations 47
3.4.2.- Expressions des A_{ij} pour $q_1 = q_3 = 0$ et $q_2 = q_4 = 1$ (potentiels d'ordre 0 et 1) 51
3.4.2.1.- Evaluation des coefficients $A_{ij}^{1,2,3,4}$ 53
3.4.2.2.- Evaluation des coefficients $A_{\ell k}^{5,6,7,8}$ 58
3.4.3.- $q_1 = 2$, $q_3 = 0$, $q_2 = 3$, $q_4 = 1$ (potentiels d'ordre 2, 0, 3, 1) 63
3.4.3.1.- Evaluation des coefficients $A_{ij}^{9,10,11,12}$ 64

3.4.3.2.- Evaluation des coefficients $A_{\ell j}^{13,14,15,16}$ 67

CHAPITRE 4

Applications numériques - Valeurs propres des plaques à conditions aux limites naturelleset uniformes sur tout le contour - Valeurs propres des plaques à conditions aux limites mêlées sur le contour.

4.1.- Valeurs propres des plaques à conditions aux limites naturelles uniformes sur tout le contour .. 74

4.1.1.- Plaque circulaire, comparaison des valeurs propres données par la résolution des équations intégrales à celles données par les formules classiques 74

4.1.1.1.- Plaque circulaire à bord encastré 74

4.1.1.2.- Plaque circulaire à bord appuyé 78

4.1.1.3.- Plaque circulaire à bord libre 80

4.1.2.- Plaque encastrée de forme quelconque, comparaison des valeurs propres données par la résolution des équations intégrales et celles données par l'expérience 83

4.2.- Valeurs propres des plaques à conditions aux limites mêlées sur le contour 87

4.2.1.- Plaque circulaire encastrée sur un arc $\Pi/2$, Π ou $3\Pi/2$ et appuyéesur le reste du contour, comparaison des valeurs propres données par la résolution des équations intégrales à celles proposées par certains auteurs 87

4.2.2.- Plaque circulaire encastrée sur un arc $3\Pi/4$ ou Π est libre sur le reste du contour comparaison des valeurs propres données par la résolution des équations intégrales à celles de l'expérience 90

CONCLUSION GENERALE 101

ANNEXES

Annexe 1 : Calcul des coefficients $A_{ii}^{1,2,3,4}$ 105

Annexe 2 : Calcul de $\tilde{A}_{ij}^{1,2,3,4}$ par développement en ondes cylindriques centrées en P_j 113

Annexe 3 : Calcul des coefficients $A_{\ell\ell}^{5,6,7,8}$ 118

Annexe 4 : Calcul des coefficients $A_{ii}^{9,10,11,12}$ 132

Annexe 5 : Plaque circulaire : valeurs des paramètres intervenant dans les formules 134

Annexe 6 : Plaque de forme quelconque encastrée, évaluation des grandeurs intervenant dans les formules 138

BIBLIOGRAPHIE 141

°°°

- RESUME -

La recherche des fréquences propres des plaques minces vibrant en flexion est étudiée depuis longtemps, sans que pour cela des méthodes applicables dans tous les cas aient été dégagées.

L'objet du présent travail est de proposer une méthode générale de résolution de ce type de problèmes qui fait appel à des équations intégrales établies à partir de potentiels de couches.

Ces équations étant définies sur le bord de la plaque, et les conditions aux limites exprimées en fonction des coordonnées locales du contour, on s'affranchit ainsi de la forme de la plaque et de l'éventuelle complexité des conditions aux limites (en particulier problèmes à conditions aux limites non uniformes sur tout le bord).

Pour traiter numériquement ces équations intégrales, diverses méthodes de discrétisation sont proposées. Sur plusieurs exemples on compare les valeurs numériques obtenues avec : des résultats théoriques classiques ; des résultats partiels de certains auteurs ; des résultats expérimentaux. Dans tous les cas l'accord est satisfaisant.

INTRODUCTION

Une question importante qui se pose souvent en mécanique, au niveau des techniques de l'ingénieur, est la détermination à priori des fréquences propres et modes propres des structures. Il est bien connu qu'excité au voisinage d'une de ses fréquences de résonance un système mécanique prend des déformations de grande amplitude pouvant aller jusqu'à la rupture de la structure.

Une de ces structures de base est la plaque. Les travaux relatifs à la détermination des modes propres d'une plaque sont très abondants et le plus souvent anciens. Les premiers auteurs, tel Lord Rayleigh, ne disposant pas de calculateurs ont recherché des solutions exprimables à l'aide des fonctions connues : fonctions trigonométriques, hyperboliques, fonctions de Bessel ou de Mathieu ; ils ne pouvaient ainsi résoudre que les problèmes simples des plaques rectangulaires, circulaires ou elliptiques soumises à des conditions aux limites bien particulières. A partir de ces résultats des méthodes de perturbations ont permis d'approcher la solution de problèmes voisins.

L'apparition de calculateur de plus en plus puissants a donné l'essor à l'exploitation de méthodes plus raffinées basées sur une formulation variationnelle du problème : telle la méthode de Galerkin et ses nombreuses dérivées. Ainsi des problèmes plus compliqués ont pu être résolus comme par exemple la recherche des fréquences propres de plaques triangulaires ou trapezoïdales soumises à certains types de conditions aux limites. Une excellente synthèse de tous ces travaux a été présentée en 1969 dans une monographie d'Arthur W. Leissa [1].

Néanmoins, il ressort de cet ouvrage qu'aucune méthode vraiment générale n'a été encore proposée ; par exemple les méthodes de perturbations ne semblent vraiment exploitables que pour la détermination de la première valeur propre.

Guidé par les excellents résultats obtenus dans des problèmes de diffraction les plus divers par la méthode des potentiels de couches, nous avons ramené le problème des plaques à la résolution d'un système d'équations intégrales définies sur le bord de la plaque. Tout comme en électrostatique et en électromagnétisme la résolution numérique du système d'équations intégrales et plus particulièrement la recherche de ses singularités se prête très bien au traitement numérique.

Par discrétisation on ramène le système intégral à un système algébrique linéaire ; nous donnons de ses coefficients une expression universelle les seuls paramètres intervenant sont la distance entre deux points du contour, la normale et les conditions aux limites en ces points. Ainsi, par cette technique le calcul des fréquences propres d'une plaque de forme quelconque soumise à diverses conditions aux limites sur son contour n'est pas fondamentalement différent de celui des fréquences propres d'une plaque circulaire encastrée par exemple. La convergence de nos approximations est suffisamment rapide et la précision obtenue dans les résultats, pour des temps de calcul raisonnables, doivent satisfaire amplement les besoins du physicien.

Le présent mémoire est divisé en quatre chapitres et six annexes.

Le premier chapitre est un rappel de théorie variationnelle des problèmes des plaques. Partant du principe d'Hamilton on donne l'expression de la formule de Green avec les conditions aux limites exprimées à l'aide des coordonnées locales du contour. On montre également quels sont les types de conditions aux limites compatibles avec l'existence et l'unicité de la solution.

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré à l'établissement d'un système d'équations intégrales équivalent au système différentiel du problème des plaques. A partir de la connaissance d'une solution élémentaire de l'opérateur des plaques nous définissons des potentiels de multicouches portées par le bord de la plaque et vérifiant une condition de Sommerfeld (conservation de l'énergie). Nous étudions les propriétés de ces potentiels et en particulier leurs discontinuités à la traversée du contour support des couches. La recherche d'une solution de l'équation homogène comme somme de deux potentiels de couches (d'ordre compris entre 0 et 3) conduit, lorsque nous écrivons les conditions aux limites, à un système de deux équations intégrales. Nous montrons alors l'équivalence avec le système différentiel de départ : mêmes fréquences propres, mêmes conditions d'existence et d'unicité de la solution.

Le chapitre 3 traite du schéma général de résolution du système intégral équivalent. Par discrétisation nous ramenons le système d'équations intégrales à un système linéaire de coefficients complexes A_{ij}. Nous donnons les expressions analytiques générales de ces coefficients pour les différents ordres de potentiels de couches et les différentes conditions aux limites envisagées.

Le chapitre 4, consacré aux applications numériques, permet de vérifier, à propos de la recherche des valeurs (ou fréquences) propres des plaques, la validité des méthodes proposées. Nous traitons les cas de problèmes à conditions aux limites uniformes sur tout le contour et ceux où les conditions sont dites mêlées. La comparaison de nos résultats numériques à des résultats soit déjà connus, soit expérimentalement obtenus par nous même est dans tous les cas satisfaisante.

Afin d'alléger l'exposé, nous avons renvoyé en annexes le calcul, le plus souvent analytique, des expressions des coefficients A_{ij} des chapitres 3 et 4.

°°°

CHAPITRE 1

Equation des plaques minces vibrant en flexion - Notion d'énergie - Existence et unicité de la solution Conditions aux limites

Sommaire.

A partir de la formulation énergétique du problème des plaques minces non dissipatives vibrant en flexion, on démontre l'existence et l'unicité de la solution compatible avec différents types de conditions aux limites [2]. Ces démonstrations s'appuient sur les résultats classiques de la théorie variationnelle des problèmes aux limites.

On a l'habitude, dans la pratique, de considérer des plaques dites encastrées, libres, sur appuis. On peut montrer que ces cas particuliers entrent dans un cadre plus général d'une théorie définissant un espace fonctionnel V (espace de la solution et des conditions aux limites).

D'autres types de conditions aux limites relèvent de cette théorie, et, compte tenu des légères fluctuations des conditions expérimentales, il n'est pas dit qu'une formulation des conditions aux limites plus originale, se rapprochant plus de l'expérience, ne puisse pas être trouvée par cette voie. Enfin, le cas des conditions aux limites mêlées (par exemple plaque partiellement encastrée et libre) entre tout à fait dans le champ d'application de notre exposé.

°°°

1.1.- Notion d'énergie.

Dans le cas linéaire, l'énergie de déformation dans un corps élastique pour un élément de volume dv est [3] :

$$\frac{1}{2}\, e_{ij}\, \zeta_{ij} \qquad \text{(avec sommation sur les indices répétés)}$$

e_{ij} composante du tenseur de déformation,
ζ_{ij} composante du tenseur des contraintes

étendue au volume v du corps il vient :

$$U = \frac{1}{2} \int_v e_{ij}\, \zeta_{ij}\, dv$$

Dans le cas d'une plaque mince se déformant en flexion pure (domaine linéaire) l'énergie de déformation est :

$$(1.1.) \qquad U = \frac{D}{2} \int_\Omega \left\{ (1-\nu) \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right)^2 + \nu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right\} dx$$

avec :

Ω domaine de définition de la plaque de frontière Γ

$u(x, t)$ élongation d'un point de la plaque au point $x(x_1 , x_2)$ à l'instant t.

$dx = dx_1\, dx_2$.

$D = \dfrac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$ rigidité du matériau.

E = molude de Young.

h = épaisseur de la plaque.

ν = coefficient de Poisson.

Il est a remarquer que (1.1.) ainsi écrit est une forme quadratique comparable à un produit scalaire hilbertien dans lequel $u = \bar{u}$. Si :

$$K = \frac{1}{2} m \int_\Omega \dot{u}^2\, dx$$

est l'énergie cinétique et $f(x, t)$ la force extérieure appliquée au point x à l'instant t, le principe des travaux virtuels indique que quelle que soit la variation $v(x)$ la fonction $u(x, t)$ doit vérifier :

$$D \int_\Omega \left\{ (1-\nu) \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right\} dx +$$

(1.2)

$$+ m \int_\Omega \ddot{u} v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

avec m masse par unité de surface de la plaque.

Dans la suite nous ferons D et m égaux à 1 ce qui revient à travailler avec des variables réduites par un choix convenable des unités afin d'alléger les formules, nous les rétablirons lors de l'exploitation de celles-ci.

°°°

1.2.- Existence et unicité de la solution.

Soit Ω un ouvert de R^n ($n = 2$) de frontière Γ variété de dimensions $n - 1$ ($n - 1 = 1$) C^∞, ou encore C^∞ par morceaux disjoints [4]. On définit les dérivations suivant la normale extérieure à Ω.

Soit V un sous-espace vectoriel fermé de $H^2(\Omega)$ tel que :

$$H_o^2(\Omega) \subseteq V \subseteq H^2(\Omega) \tag{1.3}$$

avec :

$H_o^2(\Omega)$ adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$,

$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi$ indéfiniment différentiable sur Ω, et à support compact dans $\Omega\}$

$H^2(\Omega) = \{ u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \ \forall \ \alpha \leq 2 \}$ espace de Sobolev d'ordre 2.

D^α opérateur de dérivation.

$L^2(\Omega)$ espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω et telles que :

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx\right)^{1/2} < \infty$$

$H_o^2(\Omega)$, V, $H^2(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.

A partir de (1.1) et de (1.2), considérons la famille de forme sesquilinéaire a(t ; u ; v) [5]

$$a(t;u,v) = \int_\Omega \left\{ (1-\nu) \sum_{ij=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_j^2} \right\} dx + \sum_{j=0}^{1} < T_j u \, , \, \gamma_j v > \tag{1.4}$$

Le deuxième membre de (1.4) est composé d'un premier terme analogue à l'énergie de déformation calculée sur Ω et d'un second terme, calculé sur Γ à l'aide d'opérateurs de prolongements T_j et γ_j définis ci-dessous.

Dans (1.4) nous avons :

$t \in [0 \, , \, T]$

$v \in V$

$u \in L^2(0, T ; V)$ avec $L^2(0, T ; V)$: espace des fonctions fortement mesurables sur $[0, T]$ à valeur dans V avec la norme :

$$|u|^2_{L^2(0, T ; V)} = \int_o^T \|u\|^2_V \, dt$$

Si $\mathcal{L}(\Psi, \Phi)$ est l'espace des applications linéaires continue de Ψ dans Φ , Ψ et Φ étant 2 espaces vectoriels. Les opérateurs de prolongement d'une fonction définie dans Ω sur Γ, γ_j et T_j sont tels que :

$$\gamma_j \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), \; H^{2 - j - 1/2}(\Gamma)) \; , \quad T_j \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), \; H^{-(2 - j - 1/2)}(\Gamma))$$

$H^{2 - j - 1/2}(\Gamma)$ et $H^{-(2 - j - 1/2)}(\Gamma)$ sont des espaces de trace (voir définition dans [5]) et ils sont duaux (le signe - indique le caractère de dualité de l'un par rapport à l'autre).

$\gamma_j = \dfrac{\partial^j}{\partial^j_n}$, $j = 0, 1$ est l'opérateur de dérivation normale,

T_j est un opérateur différentiel d'ordre $4 - j - 1$.

La forme $a(t ; u, v)$ ainsi définie par (1.4) est coercitive [6] alors :

$$a(t ; u, v) + \frac{d^2}{dt^2}(u(x, t), v) = (f(t, x), v) \tag{1.5}$$

a une solution unique vérifiant les conditions initiales :

$$u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$$

pour :

$$\forall v \in V \; , \; u \in L^2(0, T ; V), \; f \in L^2(0, T ; L^2(\Omega))$$

L'opérateur correspondant à (1.4) n'est autre que l'opérateur bilaplacien écrit sous la forme oblique [6]

$$\Delta^2 u = \sum_{ij=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \sum_{ij=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) \tag{1.6}$$

avec :

$$a + b = 1 \quad (a = 1 - \nu \; , \; b = \nu)$$

Remarque 1.1. :
==========

Le caractère d'obliquité provient du fait que lorsqu'on tire sur un barreau il y a allongement dans le sens de la traction mais aussi rétrécissement de la section..

A partir de la formule de Green de l'opérateur (1.6) et des propriétés de (1.5) il est facile de montrer que :

$$(1.7) \qquad \Delta^2 u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = f(x, t)$$

a une solution unique si :

$$(1.8) \qquad \sum_{j=0}^{1} < S_j u - T_j u \ , \ \gamma_j v > = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \ u, v \in V$$

(1.8) représente les conditions aux limites, S_j est un opérateur différentiel introduit par la formule de Green et a le même ordre de dérivation que T_j.

°°°

1.3.- Conditions aux limites.

En explicitant les conditions aux limites (1.8) et en les exprimant à l'aide des coordonnées locales du contour, il vient :

$$(1.9)\quad \begin{cases} (1.9.1) & \gamma_o u = \mathrm{Tr}\, u \\ (1.9.2) & \gamma_1 u = \mathrm{Tr}\,\{\partial_n u\} \\ (1.9.3) & S_o u - T_o u = -\{\mathrm{Tr}(\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s u\} \\ (1.9.4) & S_1 u - T_1 u = -\mathrm{Tr}\{\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u\} \end{cases}$$

Le symbole Tr désigne la trace d'une fonction sur le bord Γ, ∂_n l'opérateur de dérivation normale, ∂_s l'opérateur de dérivation tangentielle.

Remarque 1.2 :

Les conditions (1.9.1) et (1.9.2) sont des conditions purement géométriques, (1.9.3) et (1.9.4) sont des conditions mécaniques car elles font intervenir le coefficient de Poisson ν et la rigidité du matériau.

Remarque 1.3 :

Si l'opérateur bilaplacien n'avait pas à être écrit sous la forme oblique (1.6) les conditions (1.9.3) et (1.9.4) se réduisaient à Tr $\partial_n \Delta u$ et Tr Δu. C'est généralement ce genre de problème que les mathématiciens ont l'habitude de traiter. Il ne serait plus nécessaire de considérer tout l'espace $H^2(\Omega)$ de Sobolev précédent mais simplement l'espace [6], [7], [8] :

$$\mathcal{K} = \{u \mid u \in L^2(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

Ce problème ainsi défini ne correspond pas au problème physique de la vibration des plaques minces.

Nous allons donner la signification physique des conditions aux limites (1.9).

Tr $\{u\}$: valeur de l'élongation sur le bord.

Tr $\{\partial_n u\}$: valeur de la tangente à l'élongation sur le bord.

- Tr $\{\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u\}$: valeur de la composante normale du moment fléchissant sur le bord.

- Tr $\{\partial_n \Delta u\}$: valeur du gradient normal de l'effort tranchant sur le bord.

- $\partial_s \, \mathrm{Tr} \{ \partial_n \partial_s u \}$: gradient tangentiel de la valeur de l'effort de torsion sur le bord.

L'addition de ces deux dernier termes donne la condition classique de Kirckhoff.

Remarque 1.4.

Exprimer les conditions aux limites à l'aide des coordonnées locales du contour permet de s'affranchir de la forme de celui-ci.

Il est évident que si l'on remplace ∂_n et ∂_s dans (1.9) par leur expressions en fonction de x et y ou de ρ et θ on retrouve bien les conditions classiques d'une plaque rectangulaire ou circulaire.

A partir du choix de l'espace V, pour le couple u et $v \in V$, on déduit les conditions aux limites compatibles avec le problème. Nous allons passer en revue des espaces V, répondant à (1.3), et donnant naissance à des problèmes ayant une signification physique.

1°) $V = H_o^2(\Omega)$.

Alors pour u, $v \in V \Rightarrow \mathrm{Tr}\{u\} = 0$ et $\mathrm{Tr}\{\partial_n u\} = 0$ sur Γ. Ce sont là les conditions physiques d'une plaque : plaque à bord encastré.

2°) $V = H^2(\Omega)$.

Alors pour :

$$u, v \in V \Rightarrow \begin{cases} -\mathrm{Tr}\{\Delta u - (1-\nu) d_s^2 u\} = 0 \\ -\{\mathrm{Tr}\, \partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s u\} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma$$

Ce sont là les conditions physiques d'une plaque à bord libre.

3°) $V = H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

$$\text{Alors pour u et } v \in V \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Tr}\{u\} = 0 \\ -\mathrm{Tr}\{\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u\} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma$$

Ce sont là les conditions physiques d'une plaque : plaque à bord appuyé.

Remarque 1.5.

Les cas 1 et 2 représentent les extrêmes de l'espace V (voir (1.3) correspondant bien aux cas extrêmes du problème physique : plaque encastrée (conditions purement géométriques) et plaque libre (conditions uniquement mécaniques). Le cas 3, intermédiaire :

$$(H_o^1(\Omega) \subset H_o^2(\Omega) \subset H^2(\Omega)) ,$$

correspond lui aussi à un cas intermédiaire pour la physique : plaque appuyée (1 condition géométrique, et 1 condition mécanique).

Remarque 1.6.

Les trois cas envisagés ci-dessus correspondent à trois problèmes aux limites à conditions dites naturelles et uniformes sur tout le contour. Il est possible de traiter des problèmes ayant pour conditions aux limites des combinaisons des conditions naturelles.

4°) $V = \{ v \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma ,\ \partial_n v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \}$

Alors pour :

$$u \text{ et } v \in V \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Tr}\{u\} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \mathrm{Tr}\{\partial_n u\} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\mathrm{Tr}\{\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u\} = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_1 \end{cases}$$

La plaque est encastrée sur Γ_1 et appuyée sur $\Gamma - \Gamma_1$.

5°) $V = \{ v \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 ,\ \partial_n v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \}$

Alors :

$$u,\ v \in V \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Tr}\{u\} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \mathrm{Tr}\{\partial_n u\} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\mathrm{Tr}\{\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u\} = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_1 \\ -\{\mathrm{Tr}\,\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s u)\} = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_1 \end{cases}$$

La plaque est encastrée sur Γ_1 et libre sur $\Gamma - \Gamma_1$.

6°) $V = H \cap H^2(\Omega)$ avec $H = \{ v \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \}$, $H \subset V$.

Alors :

$$u,\ v \in V \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Tr}\{u\} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\mathrm{Tr}\{\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u\} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ -\{\mathrm{Tr}\,\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_s \partial_n u)\} = 0 & \text{sur } \Gamma - \Gamma_1 \end{cases}$$

La plaque est appuyée sur Γ_1 et libre sur $\Gamma - \Gamma_1$.

Remarque 1.7.

Pour les six cas envisagés le problème a une solution unique, il est intéressant de voir que les cas 4, 5 et 6 correspondent à des problèmes à conditions aux limites mêlées se rencontrant souvent dans la pratique.

°°°

Conclusion.

Ainsi formulé le problème de la vibration d'une plaque peut être résolu numériquement par la méthode classique des différences finies (et toutes celles qui en découlent). Pour notre part nous préférons adopter une méthode plus globale consistant à répartir des potentiels de couches sur le bord de la plaque [9].

°°°

CHAPITRE 2

Potentiels de couches et équations intégrales

Propriétés des potentiels de couches

Equivalence entre la formulation différentielle

et la formulation intégrale du problème des plaques

Sommaire.

Nous cherchons la solution du problème des plaques homogènes sous forme d'une combinaison de deux potentiels de couches [10] répartis sur le bord de la plaque ; les densités définies sur le bord sont déterminées par un système de deux équation intégrales [11], [12] obtenues en écrivant les conditions aux limites. On donnera les propriétés des potentiels de couches en particulier les discontinuités à la traversée de la frontière.

Toutefois, remplacer un problème différentiel par un problème intégral conduit à se poser la question d'équivalence entre ceux-ci : mêmes conditions d'existence et d'unicité de la solution ainsi qu'identité des fréquences propres correspondantes. La démonstration de l'équivalence entre ces deux formulations, donnée par P. Filippi, s'appuie sur le choix d'une solution élémentaire vérifiant une condition de Sommerfeld et sur l'existence et l'unicité de la solution des problèmes extérieures soumise au même comportement asymptotique.

°°°

2.1._ Potentiels de couches et équations intégrales.

A partir d'une solution élémentaire de l'opérateur des plaques, nous définissons un potentiel de couche par convolution avec une distribution portée par une ligne, en particulier le contour limitant la plaque.

Si on cherche une solution de l'équation des plaques homogènes comme somme de deux potentiels de couches, l'écriture des conditions aux limites à satisfaire fournit un système de deux équations intégrales permettant de déterminer les densités de couches inconnues.

2.1.1.- Solution élémentaire de l'opérateur des plaques.

Une solution élémentaire de l'opérateur des plaques est une pseudo fonction [13] définie par l'équation :

(2.1) $(\Delta^2 - \lambda^4)G = \delta$, δ mesure de Dirac.

G est une transformée de Fourier inverse de la pseudo fonction :

$$g = \frac{1}{16\pi^4\xi^4 - \lambda^4} = -\frac{1}{2\lambda^2}\left\{\frac{1}{4\pi^2\xi^2 - \lambda^2} - \frac{1}{4\pi^2\xi^2 + \lambda^2}\right\}$$

alors toute solution élémentaire est de la forme :

$$G = \frac{i}{8\lambda^2}\left\{H_o^{(1)}(\lambda r) - H_o^{(1)}(i\lambda r)\right\} + \text{une solution quelconque de l'équation homogène.}$$

r : distance à l'origine d'un point M,

$H_o^{(1)}$: fonction de Hankel de première espèce d'ordre zéro que nous notons par la suite H_o.

L'opérateur des plaques étant un opérateur de convolution, par translation on associe à G un noyau élémentaire :

$$G(\lambda|M - M'|) = \frac{i}{8\lambda^2}\left\{H_o(\lambda|M - M'|) - H_o(i\lambda|M - M'|)\right\}$$

+ translatée d'une solution quelconque de l'équation homogène.

$|M - M'|$: distance d'un point M' au point M.

Dans tout ce qui suit nous prendrons pour solution élémentaire, celle vérifiant la condition de Sommerfeld [14].

(2.2) $\lim_{r\to\infty} G = O(r^{-1/2})$, $\lim_{r\to\infty} (\frac{\partial G}{\partial r} - i\lambda G) = O(r^{-3/2})$.

Cette solution, pour une plaque infinie excitée par une force ponctuelle hamonique $\delta e^{-i\omega t}$, , est la seule assurant le principe de conservation de l'énergie et elle a pour expression :

(2.3) $G = \frac{i}{8\lambda^2}[H_o(\lambda r) - H_o(i\lambda r)]$

Le noyau élémentaire correspondant est :

(2.4) $G(\lambda|M - M'|) = \frac{i}{8\lambda^2}[H_o(\lambda|M - M'|) - H_o(i\lambda|M - M'|)]$

2.1.2.- Définition des potentiels de couches.

Soit Γ une ligne et $(\frac{d}{dn})^q(\mu_q \delta_\Gamma)$ une distribution portée par Γ (le symbole $(\frac{d}{dn})^q$ représente la dérivation d'ordre q suivant la normale à Γ). Le potentiel créé par cette couche s'exprime par le produit de convolution :

$u = G * (\frac{d}{dn})^q (\mu_q \delta_\Gamma)$, soit encore :

(2.5) $u(M) = (-1)^q \int_\Gamma \mu_q(P) (\frac{d}{dn})^q_P G(|M - P|) dP$

μ_q est la densité de la couche, c'est une fonction définie sur Γ, u est solution de :

$(\Delta^2 - \lambda^4)u = (\frac{d}{dn})^q (\mu_q \delta_\Gamma)$

Pratiquement nous ne considérons que des potentiels de couche d'ordre $0 \leq q \leq 3$ qui apparaissent de façon naturelle dans la formule de Green afin d'éviter d'envisager des cas d'une complication à notre avis inutile (en particulier le calcul des discontinuités sur la frontière).

2.1.3.- Equations intégrales du problème.

Soit à déterminer u(M) solution de :

(2.6) $(\Delta^2 - \lambda^4)\, u(M) = f$

dans Ω vérifiant sur Γ les deux conditions aux limites que nous notons :

(2.6') $\ell_{1,2}\{u\}_P = 0 \qquad P \in \Gamma$

l'indice 1, 2 signifiant 1 ou 2.

On cherche la solution à l'aide de deux potentiels de couches :

$$u(M) = u_o + G * (\frac{d}{dn})^{q_1}(\mu_{q_1}\,\delta_\Gamma) + G * (\frac{d}{dn})^{q_2}(\mu_{q_2}\,\delta_\Gamma)$$

avec $u_o = G * f$, dont les densités de couches μ_{q_1} et μ_{q_2} sont deux fonctions à déterminer par les conditions aux limites (2.6'). L'écriture de celles-ci donne :

$$(2.7)\quad \begin{cases} 0 = \ell_{1,2}(u_o)_P + \lim\limits_{M \to P^-} \ell_{1,2}\,\{G * (\frac{d}{dn})^{q_1}(\mu_{q_1}\,\delta_\Gamma)\} \\ \qquad\qquad + \lim\limits_{M \to P^-} \ell_{1,2}\,\{G * (\frac{d}{dn})^{q_2}(\mu_{q_2}\,\delta_\Gamma)\} \end{cases}$$

P^- désigne le point limite intérieur à Γ.

Remarque 2.1.

Cette technique de résolution est classique depuis longtemps en électrostatique et électromagnétisme. Pour les problèmes elliptiques d'ordre supérieur certains auteurs l'ont déjà suggérée, en particulier Vekua [15], mais jusqu'ici les applications n'ont guère été poussées jusqu'au traitement numérique.

Une difficulté analytique apparait lorsqu'on cherche à expliciter les limites (2.7) : certaines dérivées de potentiels possèdent des sauts et certaines intégrales seront à prendre au sens des parties finies d'Hadamard [13].

° ° °

2.2.. Propriétés des potentiels de couches.

La propriété esssentielle qui nous intéresse est le comportement des potentiels de couches à la traversée de la frontière (en particulier discontinuité à la traversée du support des couches). C'est à partir des résultats de cette étude que nous pourrons donner des différentes conditions aux limites une expression mathématique correcte.

2.2.1.- Discontinuités des potentiels de couches d'ordre 0 à

Nous écrivons l'opérateur des plaques au sens des distributions, en supposant que les fonctions u aux quelles on l'applique ne peuvent posséder de discontinuités qu'à la traversée d'un contour fermé Γ.

Cette hypothèse est en accord avec la réalité du problème physique : en effet, d'après la définition de l'énergie de déformation de la plaque, il faut que l'élongation u soit représentée par une fonction u deux fois continument différentiable dans Ω, le comportement à l'extérieur de Ω est indifférent.
On a :

$$(2.8) \qquad (\Delta^2 - \lambda^4)u = \{(\Delta^2 - \lambda^4)u\} + \sum_{j=0}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j (T_j \delta_\Gamma)$$

Nous obtenons (2.8) en écrivant d'abord le laplacien au sens des distributions puis nous appliquons l'opérateur de laplace à l'expression obtenue en notant que l'extension au plan de toute distribution portée par Γ s'exprime par des dérivées normales d'extension au plan de distributions portées par Γ [13].

Le symbole $\{(\Delta^2 - \lambda^4)u\}$ désigne la dérivation prise au sens classique, et T_j les sauts suivants :

$$(2.9) \qquad \begin{cases} T_o = [\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s u)]^+ - [\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s u)]^- \\ T_1 = [\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u]^+ - [\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u]^- \\ T_2 = [\partial_n u]^+ - [\partial_n u]^- \\ T_3 = [u]^+ - [u]^- \end{cases}$$

Le signe + signifie que $M \to P$ pour M extérieur à Ω, le signe - $M \to P$ pour M intérieur à Ω.

Il est alors aisé de voir qu'un potentiel de couche d'ordre $q(0 \leq q \leq 3)$ vérifiant au sens des distributions l'équation :

$$(\Delta^2 - \lambda^4)u^q = \left(\frac{d}{dn}\right)^q (\mu_q \delta_\Gamma)$$

présente uniquement la discontinuité $T_q = \mu_q$. On peut démontrer en outre que les sauts portent uniquement sur la dérivée normale (une démonstration analytique, faisant référence au chapitre 3, est donnée en annexes 1 et 3).

En résumé nous avons :

a) Potentiel d'ordre 0 (simple couche).

Il est solution de :

$$(\Delta^2 - \lambda^4)u^o = (\mu \delta_\Gamma)$$

$$T_o^o = \mu \quad , \quad T_1^o = T_2^o = T_3^o = 0$$

avec

$$T_o^o = \left[\partial_n^3 u^o\right]^+ - \left[\partial_n^3 u^o\right]^- = \mu$$

b) Potentiel d'ordre 1 (double couche).

Il est solution de :

$$(\Delta^2 - \lambda^4)u^1 = \frac{d}{dn}(\mu \delta_\Gamma)$$

$$T_1^1 = \mu \quad , \quad T_o^1 = T_2^1 = T_3^1 = 0$$

avec

$$T_1^1 = \left[\partial_n^2 u^1\right]^+ - \left[\partial_n^2 u^1\right]^-$$

c) Potentiel d'ordre 2.

Il est solution de :

$$(\Delta^2 - \lambda^4)u^2 = \left(\frac{d}{dn}\right)^2 (\mu \delta_\Gamma)$$

$$T_2^2 = \mu \ , \ T_o^2 = T_1^2 = T_3^2 = 0$$

avec :

$$T_2^2 = \left[\partial_n u^2\right]^+ - \left[\partial_n u^2\right]^-$$

d) Potentiel d'ordre 3.

Il est solution de :

$$(\Delta^2 - \lambda^4)u^3 = \left(\frac{d}{dn}\right)^3 (\mu \delta_\Gamma)$$

$$T_3^3 = \mu \quad , \quad T_o^3 = T_1^3 = T_2^3 = 0$$

avec

$$T_3^3 = [u^3]^+ - [u^3]^-$$

2.2.2.- Trace des potentiels de couches d'ordre 0 et 3 et de leurs dérivées normales jusqu'à l'ordre 3.

D'une manière générale la trace d'une dérivée normale, tangente ou oblique d'ordre quelconque, figurant dans les conditions aux limites du problème, d'un potentiel de couche d'ordre q s'écrit sous la forme.

$$(2.10) \quad \begin{cases} \lim_{M \to P_o^-} \ell(M) \int_\Gamma \mu_q(P)\, \delta^q_{n_P}\, G(|M-P|)\,dP = \\ \qquad -\frac{1}{2} f[\mu(P_o)] + Pf \int_\Gamma \mu(P)\, \ell(P_o) \{ \delta^q_{n_P}\, G(|P-P_o|)\,dP \end{cases}$$

$M \in \Omega$, $P, P_o \in \Gamma$

ℓ est l'opérateur de dérivation envisagé,

$f[\mu(P_o)]$ est le saut de :

$$\ell(P_o) \int_\Gamma \mu(P)\, \delta^q_{n_P}\, G(|M-P|)\,dP$$

Pf signifie partie finie.

Plus précisément remarquons tout d'abord que le noyau $G(|M-P|)$ est une fonction continue à l'origine et une fois continuement différentiable. Il s'ensuit que lorsqu'on prend la trace d'une expression intégrale faisant intervenir les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 du noyau, les intégrales sont prises au sens classique.

Pour des dérivations d'ordre 3, il peut apparaître un saut et les intégrales sont des valeurs principale de Cauchy.

Enfin, pour des dérivations d'ordre supérieur la possibilité de saut persiste et les intégrales sont alors des parties finies d'intégrales (Pf). Les noyaux ayant une singularité en r^{-n} (n entier) il y a plusieurs parties finies possibles [13], celle qui possède un sens physique pour le problème est définie de façon unique par (2.10). En effet, c'est celle là qui représente bien la valeur des différentes quantités physiques telles que l'élongation, la fléche, le moment fléchissant et la condition de Kirchkoff, et définies en tous points de la plaque.

°°°

2.3.- Equivalence entre la formulation différentielle et la formulation intégrale du problème des plaques.

Pour que le système d'équations intégrales (2.7) présente de l'intérêt quant au traitement numérique du problème proposé, il est nécessaire que les conditions d'existence et d'unicité de la solution ainsi que les fréquences propres (ou valeurs propres réelles) soient les mêmes que celles de l'équation différentielle de départ (2.6) associée avec les conditions aux limites (2.6').

Il en est bien ainsi pour les systèmes physiques non dissipatifs. Dans le cas de conditions aux limites dissipatives (tels les problèmes extérieurs on peut toujours écrire un système d'équations intégrales équivalent au système différentiel.

La démonstration de ces propositions s'appuie principalement sur des résultats de I.N. Vekua [15] et sur la note de P. Filippi "Problèmes aux limites elliptiques et potentiels de couches" note C.R.P. n° 1249.

Avant d'aborder la démonstration proprement dite il est bon de rappeler un résultat relatif à l'opérateur des plaques :

> Toute solution de l'équation des plaques homogène, régulière en dehors du cercle de rayon a, est développable en l'une ou l'autre des deux séries.
>
> $$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^{(1),(2)}(\lambda r) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n H_n^{(1)}(i\lambda r) e^{in\theta}$$
>
> (r, θ : coordonnées polaires).
> suivant que l'on impose l'une ou l'autre des deux conditions de Sommerfeld :
>
> $$\lim_{r\to\infty} u = O(r^{-1/2}) \ , \ \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \mp i\lambda u\right) = O(r^{-3/2})$$

Le signe - correspond à l'indice (1) de la fonction de Hankel,
le signe + l'indice (2),

Ce résultat est un cas particulier de celui donné dans [15] (Appendice II) en appliquant le théorème 9 (page 340) et le théorème 3 (page 309).

2.3.1.- Unicité de la solution des problèmes extérieurs.

Nous faisons la démonstration pour une plaque encastrée (pour les autres types de conditions la démonstration est la même).

Il faut montrer que u définie dans $\complement\Omega$ par :

$$\begin{cases} (\Delta^2 - \lambda^4)u = 0 \quad \text{dans } \complement\Omega \\ \mathrm{Tr}\{u\} = \mathrm{Tr}\{\partial_n u\} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ u = \underset{\lim r\to\infty}{O(r^{-1/2})}\ , \quad \underset{\lim r\to\infty}{\left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda u\right) = O(r^{-3/2})} \end{cases}$$

est identiquement nul : $u \equiv 0$.

Soit C le cercle de l'infini, en appliquant la formule de Green de l'opérateur des plaques à u et à $\bar{u}$ il vient :

$$(2.11)\quad \begin{cases} 0 = \int_\Gamma \{ - \mathrm{Tr}(\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u)\,\mathrm{Tr}(\partial_n \bar{u}) \\ \quad + \mathrm{Tr}(\partial_n u)\,\mathrm{Tr}(\Delta\bar{u} - (1-\nu)\partial_s^2 \bar{u}) + (\mathrm{Tr}\,\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s u))\mathrm{Tr}(\bar{u}) \\ \quad - \mathrm{Tr}(u)[\mathrm{Tr}(\partial_n \Delta \bar{u}) + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_d \bar{u})]\}d\Gamma \\ \quad + \int_C \{ - \mathrm{Tr}(\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u)\mathrm{Tr}(\partial_R \bar{u}) + \mathrm{Tr}(\partial_R u)\,\mathrm{Tr}(\Delta\bar{u} - (1-\nu)\partial_s^2 \bar{u}) \\ \quad + \mathrm{Tr}(\bar{u})[\mathrm{Tr}(\partial_R \Delta u) + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_R \partial_s u)] - \mathrm{Tr}(u)[\mathrm{Tr}(\partial_R \Delta\bar{u}) + \\ \quad + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}\,\partial_R \partial_s \bar{u}]\}R d\theta \end{cases}$$

Et en tenant compte de la condition aux limites sur Γ

$$(2.12)\quad \begin{cases} 0 = \int_C \{ - \mathrm{Tr}(\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u)\mathrm{Tr}(\partial_R \bar{u}) + \mathrm{Tr}(\partial_R u)\mathrm{Tr}(\Delta\bar{u} - (1-\nu)\partial_s^2 \bar{u}) \\ + \mathrm{Tr}(\bar{u})[\mathrm{Tr}(\partial_R \Delta u) + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_R \partial_s u)] - \mathrm{Tr}(u)[\mathrm{Tr}(\partial_R \Delta\bar{u}) \\ + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_R \partial_s \bar{u})]\}R d\theta \end{cases}$$

En raison de la condition de Sommerfeld choisie, pour r assez grand u est de la forme :

$$(2.13) \qquad u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta} H_n^{(1)}(\lambda r) e^{in\theta}$$

+ termes à décroissance exponentielle ($e^{-\lambda r}$)

En portant (2.13) dans (2.12) et en ne conservant que les termes donnant une contribution non nulle pour $R \to \infty$, il est facile de voir que $|a_n|^2 = 0 \quad \forall n$, c'est à dire $u \equiv 0$ dans $\complement\Omega$.

2.3.2.- Existence de la solution des problèmes extérieurs.

Cette démonstration est calquée sur celle de Vekua [15] pour l'équation de Helmholtz.

La plaque est toujours encastrée, soit à chercher $w = u + u_o$ solution de :

$$(2.14) \qquad \begin{cases} (\Delta^2 - \lambda^4)w = f \quad \text{dans } \complement\Omega \\ \mathrm{Tr}\{w\} = \mathrm{Tr}(\partial_n w) = 0 \text{ sur } \Gamma \\ u_o = G * f. \end{cases}$$

En appliquant la formule de Green à u et G et en tenant compte des conditions aux limites il vient :

$$u = \int_\Gamma \{ - \mathrm{Tr}[\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u]\,\mathrm{Tr}(\partial_n G) + [\mathrm{Tr}\,\partial_n \Delta u + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}\,\partial_n \partial_s u]\,\mathrm{Tr}\,G\}\,d\Gamma$$

$$- \int_\Gamma \{ \mathrm{Tr}\,\partial_n u_o\,\mathrm{Tr}[\Delta G - (1-\nu)\partial_s^2 G] - \mathrm{Tr}\,u_o[\mathrm{Tr}\,\partial_n \Delta G + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}\,\partial_n \partial_s G]\}d$$

que nous écrivons pour simplifier :

$$(2.15) \qquad u = \int_\Gamma \{ - L_2 u\,\partial_n G + L_3 u G\}\,d\Gamma - g$$

En passant sur Γ et en tenant compte des discontinuités (voir paragraphe 2.2.1) il vient :

$$(2.16) \qquad \begin{cases} 0 = -\dfrac{L_2' u}{2} - \displaystyle\int_\Gamma L_2 u\, L_2'\,\mathrm{Tr}\,\partial_n G + \int_\Gamma L_3 u\, L_2'\,\mathrm{Tr}\,G - L_2' g \\ \\ 0 = -\,\mathrm{Pf}\displaystyle\int_\Gamma L_2 u\, L_3'\,\mathrm{Tr}\,\partial_n G - \frac{L_3' u}{2} + \int_\Gamma L_3 u\, L_3'\,\mathrm{Tr}\,G - L_3' g \end{cases}$$

avec L_2', L_3' les opérateurs L_2 et L_3 appliqués non au point d'intégration mais au point courant.

Le système (2.16) est justiciable de l'alternative de Fredholm. S'il n'est pas singulier, il y a une solution unique. S'il est singulier, soient $(v_1^i\ ,\ v_2^i)$ le système de solutions propres du système adjoint, alors (2.16) a une solution si le second membre est orthogonal à tous les v_1^i , v_2^i , ce qui est toujours le cas pour λ réel.

Soit v une solution du problème intérieur, dit encore problème intérieur associé :

$$\begin{cases} (\Delta^2 - \lambda^2)v = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathrm{Tr}\,[\Delta v - (1-\nu)\partial_s^2 v] = 0,\ \mathrm{Tr}\,\partial_n \Delta v + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}\,\partial_n \partial_s v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

(problème à conditions aux limites du bord libre).

En appliquant la formule de Green à v et à $\overline{G}$, et en posant :

$$v_1 = -\,\mathrm{Tr}\,\partial_n v\ ,\quad v_2 = \mathrm{Tr}\,v$$

il vient sur Γ :

$$\begin{cases} -\dfrac{v_2}{2} + \displaystyle\int_\Gamma v_2 L_3 \overline{G} + \int_\Gamma v_1 L_2 \overline{G} = 0 \\ \mathrm{Pf}\displaystyle\int_\Gamma v_1 \partial_{n'} L_3 \overline{G} + \frac{v_1}{2} + \int_\Gamma v_1 \partial_{n'} L_2 \overline{G} = 0 \end{cases}$$

Ce système est l'adjoint de (2.16). Il s'ensuit que pour que (2.16) ait une solution lorsqu'il est singulier il faut que le second membre soit orthogonal à tout couple $(v_1\ ,\ v_2)$, soit :

$$(2.17) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{Tr}\,\partial_n u_o(x)dx\ \mathrm{Pf}\int_\Gamma L'_2\ L_2\, G(x,x')\,\overline{v_1}(x')dx' \\ +\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{Tr}\,u_o(x)dx\ \mathrm{Pf}\int_\Gamma L'_2\, L_3\, G(x,x')\overline{v_1}(x')dx' \\ -\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{Tr}\,\partial_n u_o(x)dx\,\mathrm{Pf}\int_\Gamma L'_3\, L_2\, G(x,x')\,\overline{v_2}(x')dx' \\ +\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{Tr}\,u_o(x)dx\,\mathrm{Pf}\int_\Gamma L'_3\, L_3\, G(x,x')\,\overline{v_2}(x')dx' = 0 \end{cases}$$

La relation (2.17) est toujours vérifiée car les conditions aux limites sur v donnent :

$$(2.18)\qquad \begin{cases} \mathrm{Pf}\int_\Gamma [v_1(x')L_2L_2'\,\overline{G}(x,x') + v_2(x')L_2L_3'\,\overline{G}(x,x')]dx' = 0 \\ \mathrm{Pf}\int_\Gamma [v_1(x')L_3L_2'\,\overline{G}(x,x') + v_2(x')L_3L_3'\,\overline{G}(x,x')]dx' = 0 \end{cases}$$

Remarque 2.2.

La démonstration que nous venons de donner est relative a une plaque à bord encastré ; cette façon de procéder s'étend facilement aux autres types de conditions aux limites à condition de bien choisir le problème intérieur associé :

Condition "bord appuyé"

Problème intérieur associé
$$\begin{cases} (\Delta^2 - \lambda^4)v = 0 & v \in \Omega \\ \mathrm{Tr}\,\partial_n v = 0 & \\ \mathrm{Tr}\,\partial_n \Delta v + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}\,\partial_n \partial_s v = 0 & v \in \Gamma \end{cases}$$

Condition "bord libre"

Problème intérieur associé
$$\begin{cases} (\Delta^2 - \lambda^4)v = 0 & v \in \Omega \\ \mathrm{Tr}\, v = 0 & \\ \mathrm{Tr}\,\partial_n v = 0 & v \in \Gamma \end{cases}$$

2.3.3.- Equivalence entre le système d'équations intégrales (2.7) et le système différentiel (2.6) et (2.6').

Reprenons l'énoncé du problème. Soit Ω un ouvert borné du plan de frontière Γ. Soit à chercher u solution de :

$$(2.19)\qquad \begin{cases} (\Delta^2 - \lambda^4)u = f & \text{dans } \Omega \\ + 2 \text{ conditions aux limites.} \end{cases}$$

sous la forme :

$$(2.20)\qquad \tilde{u} = G * f + G *(\mu_o\,\delta_\Gamma) + G\,\frac{d}{dn}(\mu_1\,\delta_\Gamma)$$

avec :

$$G = \frac{i}{8\lambda^2}\{H_o(\lambda r) - H_o(i\lambda r)\}$$

Remarque 2.3.

Dans (2.20 on prend des potentiels de couches d'ordre 0 et 1, le raisonnement qui suit est valable pour des couches dont l'ordre est compris entre 0 et 3 (couches apparaissant naturellement dans la formule de Green).

On se propose de montrer que :

> Le système d'équations intégrales obtenues à partir de (2.20) en écrivant les conditions aux limites choisies ne possède pour valeurs propres réelles que celles du système différentiel de départ et avec le même ordre de multiplicité ; en dehors de ces valeurs propres la solution (μ_o , μ_1) existe et est unique.

1°) Existence du couple μ_o , μ_1.

Si $f \neq 0$ et $\lambda \neq$ valeur porpre, soit u la solution de (2.19) et w la solution de :

$$(2.21) \qquad \begin{cases} (\Delta^2 - \lambda^4)w = 0 & \text{dans } \complement\Omega \\ \mathrm{Tr}(w) = \mathrm{Tr}(u)\ \mathrm{Tr}(\partial_n w) = \mathrm{Tr}(\partial_n u) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

De par le choix des conditions aux limites imposées à w la fonction :

$$U = Y(\Omega)u + (1 - Y(\Omega))w$$

$Y(\Omega)$ fonction caractéristique de Ω ne présente que des discontinuités du même type que (2.20) de $\tilde{u}$. La solution de (2.21) existe et est unique et le couple μ_o , μ_1 défini par :

$$\mu_o = \mathrm{Tr}(\partial_n \Delta w) + (1 - \nu)\partial_s\, \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s w) - \mathrm{Tr}\, \partial_n \Delta u - (1 - \nu)\partial_s\, \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s u)$$

$$\mu_1 = \mathrm{Tr}(\Delta w - (1 - \nu)\partial_s^2 w) - \mathrm{Tr}(\Delta u - (1 - \nu)\partial_s^2 u)$$

est le couple cherché.

En effet la fonction

$$W = \tilde{u} - U - [1 - Y(\Omega)]G * f$$

($\tilde{u}$ défini par le couple (μ_o , μ_1) précédent).

$$W = Y(\Omega)\, G * f + G * (\mu_o \delta_\Gamma) + G * \frac{d}{dn}(\mu_1 \delta_\Gamma) - Y(\Omega)u - (1 - Y(\Omega))w$$

définie dans tout le plan, continue ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre 3 vérifie :

$$\begin{cases} (\Delta^2 - \lambda^4)W = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ + \text{ Sommerfeld.} \end{cases}$$

Donc $W = 0$ il s'ensuit que :

(2.22) $\tilde{u} = U = G * f + G * (\mu_o \partial_\Gamma) + G * \frac{d}{dn}(\mu_1 \partial_\Gamma)$

dans Ω et que u peut être défini par (2.20)

2°) Unicité de (μ_o , μ_1).

S'il existe un autre couple (μ_o' , μ_1') solution du problème, alors, soit U' la fonction définie comme en (2.22) la différence :

$$U - U' = G * [(\mu_o - \mu_o')\delta_\Gamma] + G * \frac{d}{dn}[(\mu_1 - \mu_1')\delta_\Gamma]$$

est identique à 0 dans Ω ; dans $\complement\Omega$ c'est une solution de l'équation homogène des plaques vérifiant la condition de Sommerfeld et par raison de continuité :

$$Tr(U - U') = 0 \text{ et } Tr[\partial_n(U - U')] = 0 \text{ sur } \Gamma$$

donc

$$U - U' \equiv 0 \quad \text{dans } \complement\Omega.$$

On en déduit que les dérivées successives de U - U' sont identiquement nulles. Ce qui implique que :

$$\mu_o - \mu_o' \equiv 0 \quad \text{et} \quad \mu_1 - \mu_1' \equiv 0$$

3°) Valeurs propres.

Si dans le système (2.19) $f \equiv 0$, la solution est identiquement nulle sauf si λ est valeur propre. Dans ce cas, il existe une (ou plusieurs) fonctions propres $u \not\equiv 0$ définies à un coefficient de normalisation près. En appliquant ce qui précède aux fonctions propres de (2.19) on conclut que le système d'équations intégrales possède les mêmes valeurs propres réelles que (2.19).

°°°

CHAPITRE 3

Schéma général de résolution d'un problème de plaque par la méthode des potentiels de couches _ Méthode de discrétisation _ Problèmes à conditions aux limites uniformes, problèmes à conditions aux limites mêlées Expressions analytiques des coefficients A_{ij} du système linéaire

Sommaire.

A partir de l'équation d'équilibre de la plaque et des conditions aux limites nous donnons le système d'équations intégrales équivalent au système différentiel. Pour gagner en généralité nous choisissons le cas où le contour Γ est : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec des conditions aux limites différentes sur Γ_1 et Γ_2. Par discrétisation nous ramenons le système d'équations intégrales à un système linéaire à coefficients complexes A_{ij}.

Le problème de la recherche des valeurs propres réelles revient à minimiser le module du déterminant principal du système linéaire ; nous passons en revue les cas où les conditions aux limites sont uniformes sur tout le contour et ceux où elles sont mêlées.

A partir du choix de l'ordre des couches envisagées pour résoudre le problème, nous donnons les expressions analytiques générales des coefficients A_{ij} pour tous les types de conditions aux limites. Nous entendons par générales, des expressions valables pour toutes formes de plaques et directement exploitables sur calculateur.

°°°
°

3.1 _ Schéma général de résolution d'un problème de plaque par des potentiels de couches.

Soit $(\Delta^2 - \lambda^4)u(M) = f(M)$ L'équation d'équilibre d'une plaque mince vibrant en flexion : $u(M)$ l'élongation d'un point de la plaque de domaine Ω, $f(M)$ une force extérieure. Afin de donner à notre exposé une portée plus générale, envisageons le cas d'une plaque de forme quelconque, de frontière Γ, soumise à des conditions aux limites telles que :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \ell_1(P_o) = 0 \\ \\ \ell_2(P_o) = 0 \end{cases} \qquad P_o \in \Gamma_1$$

et

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \ell_3(P_o) = 0 \\ \\ \ell_4(P_o) = 0 \end{cases} \qquad P_o \in \Gamma_2$$

Γ_1 et Γ_2 sont tels que : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Le point P_o est la limite lorsque le point $M \in \Omega$ tend vers Γ le long de la normale. Le problème ainsi défini est un problème à conditions aux limites mêlées. Pour le résoudre il est loisible de chercher la solution sous la forme d'une combinaison de deux couple de potentiels de couches :

$$(3.3) \qquad \begin{cases} u(M) = u_o + (-1)^{q_1} \int_{\Gamma_1} \mu_{q_1}(P)\, \partial_{n_P}^{q_1} G(M-P)dP \\ \\ \quad + (-1)^{q_2} \int_{\Gamma_1} \mu_{q_2}(P)\, \partial_{n_P}^{q_2} G(M-P)dP + (-1)^{q_3} \int_{\Gamma_2} \mu_{q_3}(P) \partial_{n_P}^{q_3} G(M-P)dP \\ \\ \quad + (-1)^{q_4} \int_{\Gamma_2} \mu_{q_4}(P) \partial_{n_P}^{q_4} G(M-P)dP , \end{cases}$$

avec $u_o = G(M-P) * f(M)$, $P \in \Gamma$, $M \in \Omega$.

Les densités de couches inconnues $\mu_{q_i}(P)$ sont choisies telles que :

$$\begin{cases} \mu_{q_1} = \mu_{q_2} = 0 \quad \text{si} \quad P \in \Gamma_2 \\ \\ \mu_{q_3} = \mu_{q_4} = 0 \quad \text{si} \quad P \in \Gamma_1 \end{cases}$$

Remarque 3.1.

Les conditions aux limites $\ell_i(P_o)$ peuvent être les conditions aux limites naturelles, précédemment définies, ou des combinaisons linéaires de celles-ci.

Remarque 3.2.

Il est facile d'étendre ce type de problème, au cas où le contour $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$ pour $j > 2$, en prenant autant de couples de potentiels de couches qu'il y a de couples de conditions aux limites différentes.

En appliquant les conditions aux limites (3.1) et (3.2) à u(M) et en faisant tendre M vers P_o, on est ramené, pour déterminer les μ_{q_i}, à résoudre le système d'équations intégrales suivant :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2} f_1^1[\mu_{q_1}(P_o)] + Pf\int_{\Gamma_1} \mu_{q_1}(P)\,\ell_1(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_1} G(P_o - P)\}dP \\
&-\tfrac{1}{2} f_2^1[\mu_{q_2}(P_o)] + Pf\int_{\Gamma_1} \mu_{q_2}(P)\ell_1(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_2} G(P_o - P)\}dP \\
&+(-1)^{q_3}\int_{\Gamma_2} \mu_{q_3}(P)\ell_1(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_3} G(P_o - P)\}dP \\
&+(-1)^{q_4}\int_{\Gamma_2} \mu_{q_2}(P)\,\ell_1(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_4} G(P_o - P)\}dP = v_1(P_o), \text{ avec } P_o \in \Gamma_1\ ,\ P \in \Gamma, \\
&(-1)^{q_1}\int_{\Gamma_1} \mu_{q_1}(P)\ell_3(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_1} G(P_o - P)\}dP + (-1)^{q_2}\int_{\Gamma_1} \mu_{q_2}\ell_3(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_2} G(P_o - P)\}dP \\
&-\tfrac{1}{2} f_3^1[\mu_{q_3}(P_o)] + Pf\int_{\Gamma_2} \mu_{q_3}(P)\ell_3(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_3} G(P_o - P)dP - \tfrac{1}{2} f_4^1[\mu_{q_4}(P_o)] \\
&+Pf\int_{\Gamma_2} \mu_{q_4}(P)\ell_3(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_4} G(P_o - P)\}dP = v_3(P_o) \text{ avec } P_o \in \Gamma_2\ ,\ P \in \Gamma\ , \\
&-\tfrac{1}{2} f_1^2[\mu_{q_1}(P_o)] + Pf\int_{\Gamma_1} \mu_{q_1}\ell_2(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_1} G(P_o - P)\}dP - \tfrac{1}{2} f_2^2[\mu_{q_2}(P_o)] \\
&+Pf\int_{\Gamma_1} \mu_{q_2}\ell_2(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_2} G(P_o - P)dP + (-1)^{q_3}\int_{\Gamma_2} \mu_{q_3}\ell_2(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_3} G(P_o - P)\}dP \\
&+(-1)^{q_4}\int_{\Gamma_2} \mu_{q_4}(P)\ell_2(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_4} G(P_o - P)\}dP = v_2(P_o) \text{ avec } P_o \in \Gamma_1\ ,\ P \in \Gamma, \\
&(-1)^{q_1}\int_{\Gamma_1} \mu_{q_1}\ell_4(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_1} G(P_o - P)\}dP + (-1)^{q_2}\int_{\Gamma_1} \mu_{q_2}\ell_4(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_2} G(P_o - P)\}dP \\
&-\tfrac{1}{2} f_3^2[\mu_{q_3}(P_o)] + Pf\int_{\Gamma_2} \mu_{q_3}\ell_4(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_3} G(P_o - P)\}dP - \tfrac{1}{2} f_4^2[\mu_{q_4}(P_o)] \\
&+Pf\int_{\Gamma_2} \mu_{q_4}\ell_4(P_o)\{\partial_{n_P}^{q_4} G(P_o - P)\}dP = v_4(P_o)\ ,\ \text{avec } P_o \in \Gamma_2\ ,\ P \in \Gamma\ ,
\end{aligned}
\right. \tag{3.4}
$$

les f_i^j sont les différents sauts et le symbole Pf a la même signification que celle donnée au châpitre 2 formule (2.10).

Remarque 3.3.

Les intégrales ne sont obligatoirement calculées au sens des parties que si P_o et P ont même domaine, et si l'ordre de dérivation de G est supérieur ou égal à 3 (ordre de dérivation = ordre de la couche + ordre de l'opérateur de la condition aux limites).

°°°

3.2.. Méthode de discrétisation.

Les μ_{q_i} étant des fonctions inconnues, résoudre le système (3.4) revient à trouver ces fonctions. Généralement, il est impossible d'effectuer directement la quadrature des intégrales et on est conduit à rechercher des méthodes de résolutions approchées. Une technique particulièrement simple et efficace est la méthode de discrétisation qui fait intervenir la partition de Γ en n morceaux sur chacun desquels sont évaluées les intégrales proposées. Moyennant un certain choix des inconnues la résolution de (3.4) revient à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires d'ordre 2n en procédant comme suit.

On découpe Γ_1 en n_1 arcs Γ_j, sur chacun desquels $\mu_{q_1}(P)$ et $\mu_{q_2}(P)$ sont approchées par des constantes $\mu_{q_1 j}$ et $\mu_{q_2 j}$; de même, on découpe Γ_2 en $n_2 = n - n_1$ arcs Γ_k, centrés en P_k, sur chacun desquels $\mu_{q_3}(P)$ et $\mu_{q_4}(P)$ sont approchées par des constantes $\mu_{q_3 k}$ et $\mu_{q_4 k}$, avec

$$j = 1, 2, \ldots, n_1 \quad , \quad k = n_1 + 1 \, , \, n_1 + 2 \, , \ldots , \, n.$$

Une approximation du système (3.4) est alors donnée par :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_1} A_{ij}^{r} \mu_{q_1 j} + A_{ij}^{r+1} \mu_{q_2 j} + \sum_{k=n_1+1}^{n} A_{ik}^{s} \mu_{q_3 k} + A_{ik}^{s+1} \mu_{q_4 k} = v_1(P_i) \\ \sum_{j=1}^{n_1} A_{\ell j}^{t} \mu_{q_1 j} + A_{\ell j}^{t+1} \mu_{q_2 j} + \sum_{k=n_1+1}^{n} A_{\ell k}^{u} \mu_{q_3 k} + A_{\ell k}^{u+1} \mu_{q_4 k} = v_3(P_\ell) \\ \sum_{j=1}^{n_1} A_{ij}^{r+2} \mu_{q_1 j} + A_{ij}^{r+3} \mu_{q_2 j} + \sum_{k=n_1+1}^{n} A_{ik}^{s+2} \mu_{q_3 k} + A_{ik}^{s+3} \mu_{q_4 k} = V_2(P_i) \\ \sum_{j=1}^{n_1} A_{\ell j}^{t+2} \mu_{q_1 j} + A_{\ell j}^{t+3} \mu_{q_2 j} + \sum_{k=n_1+1}^{n} A_{\ell k}^{u+2} \mu_{q_3 k} + A_{\ell k}^{u+3} \mu_{q_4 k} = v_4(P_\ell) \end{cases}$$

avec $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\ell = n_1 + 1, \, n_1 + 2 \, , \ldots , \, n$,

les points P_i ou P_ℓ sont les points de contrôle sur les Γ_j ou Γ_k : il y en a n.

Pour les coefficients A_{ij} ou $A_{\ell k}$, le premier indice correspond au numéro de la ligne, le second à celui de la colonne. Par définition nous avons pour l'expression de ces coefficients :

$$
(3.6)\qquad
\begin{cases}
A_{ij}^{r+m} = (-1)^{q_{1,2}} \ell_{1,2}(P_i) \underset{\lim M \to P_i^-}{\int_{\Gamma_j}} \partial_{n_P}^{q_{1,2}} G(M-P)\,dP \\[2ex]
A_{\ell k}^{u+m} = (-1)^{q_{3,4}} \ell_{3,4}(P_\ell) \underset{\lim M \to P_\ell^-}{\int_{\Gamma_k}} \partial_{n_P}^{q_{3,4}} G(M-P)\,dP \\[2ex]
A_{ik}^{s+m} = (-1)^{q_{3,4}} \int_{\Gamma_k} \ell_{1,2}(P_i) \{\partial_{n_P}^{q_{3,4}} G(P_i - P)\,dP \\[2ex]
A_{\ell j}^{t+m} = (-1)^{q_{1,2}} \int_{\Gamma_j} \ell_{3,4}(P_\ell) \{\partial_{n_P}^{q_{1,2}} G(P_\ell - P)\}\,dP\ ,
\end{cases}
$$

avec $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

(la notation indicielle 1, 2 ou 3, 4 veut dire que l'on effectue l'opération 1, 2, 3 ou 4 correspondant à la lettre auquel l'indice est affecté. Nous avons déjà fait usage de cette notation au chapitre 2 formule (2.6')).

Les valeurs du paramètre λ rendant quasi singulier le déterminant principal du système (3.5) sont une approximation des nombres (valeurs) propre de la plaque. Lorsque (3.5) n'est pas singulier, la solution $(\mu_{q_1 j}\ ,\ \mu_{q_2 j}\ ,\ \mu_{q_3 k}\ ,\ \mu_{q_4 k}\ )$ est une approximation de $\mu_{q_1}(P)$, $\mu_{q_2}(P)$, $\mu_{q_3}(P)$, $\mu_{q_4}(P)$ d'où une approximation de u(M).

°°°

3.3.- Problèmes à conditions aux limites uniformes, problèmes à conditions aux limites mêlées.

Dans le but de pouvoir donner les expressions analytiques générales des coefficients A_{ij} (ou $A_{\ell j}$, A_{ik} , $A_{\ell k}$), il convient de choisir les conditions aux limites ℓ_1 , ℓ_2, ℓ_3 , ℓ_4. Elles peuvent être les conditions aux limites naturelles, homogènes ou non, ou des combinaisons linéaires de celles-ci.

Si on choisit de prendre :

$$(3.7)\qquad \begin{cases} \ell_1 = \mathrm{Tr}(u) \\ \ell_2 = \mathrm{Tr}(\partial_n u) \\ \ell_3 = -D\left\{ \mathrm{Tr}(\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u)\right\} \\ \ell_4 = -D\left\{ \mathrm{Tr}(\partial_n \Delta u) + (1-\nu)\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_s \partial_n u)\right\} \end{cases}$$

c'est-à-dire les conditions naturelles ; il est toujours possible, à partir de celles-ci, de définir toutes les autres.

Il s'ensuit que le problème (3.3) proposé est celui de la résolution d'une plaque de forme quelconque de frontière Γ : encastrée sur Γ_1 et libre sur Γ_2 . Pratiquement ce genre de problème se rencontre souvent, c'est le cas d'une aile d'avion présumée encastrée sur le fuselage et libre ailleurs.

Remarque 4.1.

Ce problème est intéressant car il présentesimultanément les cas extrêmes des conditions physiques, à savoir : contrainte totale (encastrement) sur une portion du contour, totalement libre sur l'autre partie du contour. Tous les autres problèmes que nous pouvons envisager ne peuvent être que des combinaisons linéaires de ces deux cas.

Dans le cas particulièrement intéressant de la recherche des valeurs propres d'une plaque $v_1(P_i) = v_2(P_i) = v_3(P_\ell) = v_4(P_\ell) = 0$ dans le système (3.5) ; le déterminant à minimiser a alors le schéma de composition suivant :

(3.8)

		n		n	
		n_1	n_2	n_1	n_2
$2n$	n_1	A^{r}_{ij}	A^{s}_{ik}	A^{r+1}_{ij}	A^{s+1}_{ik}
	n_2	$A^{t}_{\ell j}$	$A^{u}_{\ell k}$	$A^{t+1}_{\ell j}$	$A^{u+1}_{\ell k}$
	n_1	A^{r+2}_{ij}	A^{s+2}_{ik}	A^{r+3}_{ij}	A^{s+3}_{ik}
	n_2	$A^{t+2}_{\ell j}$	$A^{u+2}_{\ell k}$	$A^{t+3}_{\ell j}$	$A^{u+3}_{\ell k}$

il est d'ordre 2n, composé de 16 blocs de dimensions n_1 ou n_2 ($n = n_1 + n_2$) avec :

$$i = 1, 2, \ldots, n_1 \quad , \quad \ell = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$$
$$j = 1, 2, \ldots, n_1 \quad , \quad k = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$$

Si q_1 , q_2 , q_3 , q_4 représentent l'ordre des couches (ordre de dérivation de G(M - P), les opérateurs ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 et ℓ_4 introduisent, respectivement, des dérivations d'ordre 0, 1, 2 et 3, on peut indiquer, sur un tableau, l'ordre des dérivations intervenant dans les coefficients du déterminant (3.8), afin d'être guidé dans le choix des différents potentiels de couches en vue des applications numériques.

(3.9)

	n_1	n_2	n_1	n_2
n_1	q_1	q_3	q_2	q_4
n_2	q_1+2	q_3+2	q_2+2	q_4+2
n_1	q_1+1	q_3+1	q_2+1	q_4+1
n_2	q_1+3	q_3+3	q_2+3	q_4+3

(n en haut, 2n à gauche)

Dans le tableau (3.9) chaque bloc contient un nombre qui indique l'ordre de dérivation du noyau G(M - P) ; les termes diagonaux (cas où i = j et ℓ = k), importants pour le calcul numérique, sont représentés par des carrés barrés.

Avant d'aller plus loin, il est bon de donner les différents types de problèmes que nous pouvons traiter directement à partir du tableau (3.8).

3.3.1.- Problème des valeurs propres d'une plaque à conditio aux limites uniformes sur tout le contour.

a) Plaque encastrée.

Dans ce cas $\Gamma_1 = \Gamma$, $n_1 = n$, seules les conditions (3.1) doivent être vérifiées et (3.8) et (3.9) deviennent respectivement :

(3.10)

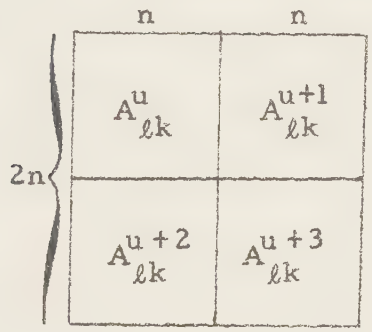
	n	n
2n	A_{ij}^{r}	A_{ij}^{r+1}
	A_{ij}^{r+2}	A_{ij}^{r+3}

(3.11)

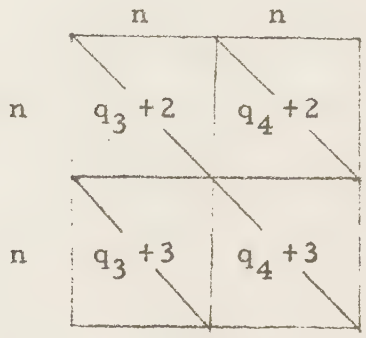
	n	n
2n	q_1	q_2
	q_1+1	q_2+1

b) Plaque libre.

Dans ce cas $\Gamma_2 = \Gamma$, $n_1 = 0$ $n_2 = n$, seules les conditions (3.2) doivent être vérifiées et (3.8) et (3.9) deviennent respectivement :



(3.12)



(3.13)

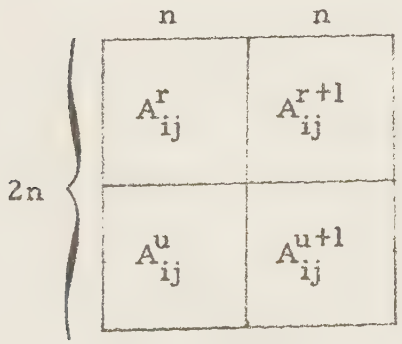
c) Plaque appuyée.

Dans ce cas nous avons comme conditions aux limites :

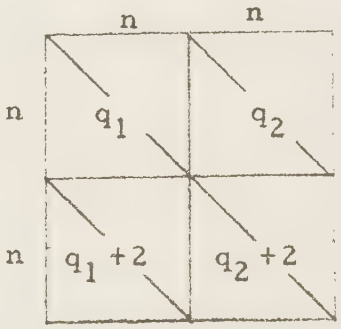
$$(3.14) \qquad \begin{cases} \ell_1(P_o) = 0 \\ \ell_3(P_o) = 0 \end{cases} \qquad P_o \in \Gamma$$

pour

$q_1 = q_3$ et $q_2 = q_4$, $i = \Gamma$ et $j = k$; (3.8) et (3.9) deviennent respectivemen



(3.15)



(3.16)

3.2.2.- Problème des valeurs propres d'une plaque à conditions aux limites mêlées.

a) Plaque encastrée sur Γ_1 , libre sur Γ_2.

C'est ce type de problème que nous avons proposé de résoudre dans le paragraphe 3.3. : il n'y a rien à changer aux expressions de (3.8) et (3.9).

b) Plaque encastrée sur Γ_1, appuyée sur Γ_2.-

Sur Γ_1 les conditions (3.1) doivent être vérifiées, sur Γ_2 les conditions (3.14).

La condition $\ell_1(P_o) = 0$ étant commune à Γ_1 et Γ_2, (3.8) et (3.9) deviennent respectivement :

(3.17)

	n_1	n_2	n_1	n_2
n_1	A^{r}_{ij}	A^{s}_{ik}	A^{r+1}_{ij}	A^{s+1}_{ik}
n_2	$A^{r}_{\ell j}$	$A^{s}_{\ell k}$	$A^{r+1}_{\ell j}$	$A^{s+1}_{\ell k}$
n_1	A^{r+2}_{ij}	A^{s+2}_{ik}	A^{r+3}_{ij}	A^{s+3}_{ik}
n_2	$A^{t}_{\ell j}$	$A^{u}_{\ell k}$	$A^{t+1}_{\ell j}$	$A^{u+1}_{\ell k}$

(n = $n_1 + n_2$; $2n$ = $n + n$)

(3.18)

q_1	q_3	q_2	q_4
q_1	q_3	q_2	q_4
q_1+1	q_3+1	q_2+1	q_4+1
q_1+2	q_3+2	q_2+2	q_4+2

Remarque 3.5.

Le problème de la plaque appuyée sur Γ_1 et libre sur Γ_2 se traite de la même façon que les deux précédents ; toutefois, compte tenu de son faible intêret, nous n'avons jugé utile de le reproduire ici.

Remarque 3.6.

Pour la résolution des problèmes mêlés nous verrons, sur des exemples numériques, qu'il n'est pas nécessaire de prendre obligatoirement $q_1 \neq q_3$ et $q_2 \neq q_4$; toutefois des discontinuités apparaissent sur les densités de couches μ.

°°°

3.4.- Expressions analytiques générales des coëfficients A_{ij} du système linéaire.

Dans ce paragraphe nous donnons les expressions analytiques générales des coefficients A_{ij} ($A_{\ell k}$ etc.) des formules (3.6) ou du déterminant (3.8). Nous entendons par expressions générales, des expressions valables pour toutes formes de plaques et directement exploitables numériquement sur calculatrice. Pour cette dernière raison nous serons conduits à formuler nos résultats en tenant compte du calculateur utilisé (UNIVAC 1108) et à choisir des formules de récurrence, pouvant paraître à priori naïves, conduisant à un gain de temps de calcul en machine. C'est pour cela, qu'avant de procéder au calcul proprement dit des A_{ij} il est bon de définir un certain nombre de grandeurs et de règles de dérivations qui interviendront par la suite.

3.4.1.- Notations et formules de dérivations.

Soit :

$$G(M - P) = \frac{i}{8\lambda^2}\left(H_o(i\lambda\rho) - H_o(\lambda\rho)\right)$$

le noyau élémentaire précédemment défini. Les fonctions de Hankel n'étant pas programmées en machine il est bon de les remplacer par les fonctions de Bessel d'argument réel correspondantes, $G(M - P)$ devient alors :

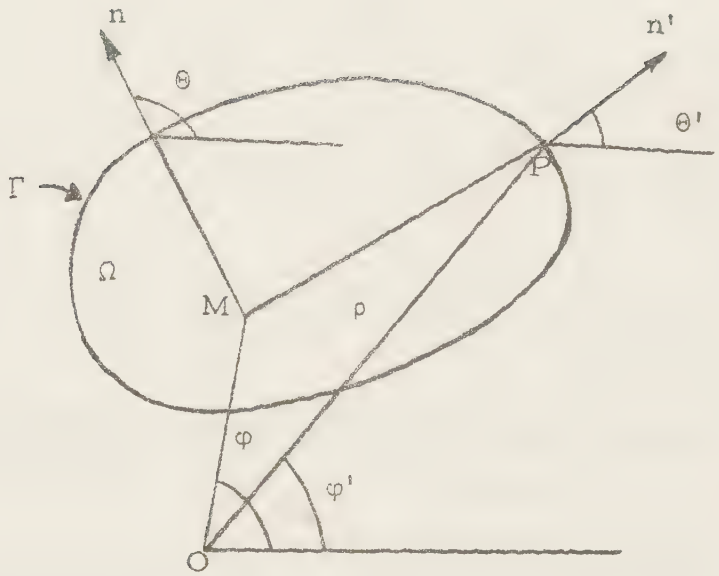
$$(3.19) \qquad G(M-P) = -\frac{1}{2\lambda^2}\left\{\frac{1}{2\Pi} K_o(\lambda\rho) + \frac{1}{4} Y_o(\lambda\rho) - \frac{i}{4} J_o(\lambda\rho)\right\}$$

avec :

ρ : distance du point M au point P , $\rho = |M - P|$

$$M \in \Omega,\ M \begin{cases} x = OM\cos\varphi \\ y = OM\sin\varphi \end{cases}$$

$$P \in \Gamma,\ P \begin{cases} X = OP\cos\varphi' \\ Y = OP\sin\varphi' \end{cases}$$



n normale extérieure à Ω du point M, Θ angle de la normale n,
n' normale extérieure à Ω du point P, Θ' angle de la normale n', d'où l'expression de ρ :

$$(3.20) \qquad \rho = \left[(X-x)^2+(Y-y)^2\right]^{1/2} = \left[\overline{0P}^2 + \overline{0M}^2 - 2.\overline{0M}.\overline{0P}\cos(\varphi' - \varphi)\right]^{1/2}$$

Règle de dérivation des fonctions de Bessel.

Afin de ne calculer sur machine que des fonctions de Bessel d'indice 0 ou 1 (gain de temps jusqu'à la valeur 6 de l'indice) et de systématiser nos formules, on adopte les notations suivantes :

$$(3.21) \quad \begin{cases} F_1(\lambda\rho) = \frac{1}{2\Pi} K_o(\lambda\rho) + \frac{1}{4} Y_o(\lambda\rho) - \frac{i}{4} J_o(\lambda\rho) \\ F_2(\lambda\rho) = \frac{1}{2\Pi} K_1(\lambda\rho) + \frac{1}{4} Y_1(\lambda\rho) - \frac{i}{4} J_1(\lambda\rho) \\ F_3(\lambda\rho) = \frac{1}{2\Pi} K_o(\lambda\rho) - \frac{1}{4} Y_o(\lambda\rho) + \frac{i}{4} J_o(\lambda\rho) \\ F_4(\lambda\rho) = \frac{1}{2\Pi} K_1(\lambda\rho) - \frac{1}{4} Y_1(\lambda\rho) + \frac{i}{4} J_1(\lambda\rho) , \end{cases}$$

(avec ces notations on a $G(M-P) = -\frac{1}{2\lambda^2} F_1(\lambda\rho)$).

Les règles de dérivations sont :

$$(3.22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1(\lambda\rho)}{\partial\rho} = -\lambda F_2 \\ \dfrac{\partial F_2(\lambda\rho)}{\partial\rho} = -\lambda\left(F_3 + \dfrac{1}{\lambda\rho} F_2\right) \\ \dfrac{\partial F_3(\lambda\rho)}{\partial\rho} = -\lambda F_4 \\ \dfrac{\partial F_4(\lambda\rho)}{\partial\rho} = -\lambda\left(F_1 + \dfrac{1}{\lambda\rho} F_4\right) \end{cases}$$

Dérivations de ρ suivant la normale en P, en M et suivant la tangente en M.

D'une manière générale :

$$(3.23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial n_P} = \dfrac{\partial}{\partial X}\cos\Theta' + \dfrac{\partial}{\partial Y}\sin\Theta' \\ \dfrac{\partial}{\partial n_M} = \dfrac{\partial}{\partial x}\cos\Theta + \dfrac{\partial}{\partial y}\sin\Theta \\ \dfrac{\partial}{\partial s_M} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\sin\Theta + \dfrac{\partial}{\partial y}\cos\Theta \end{cases}$$

En appliquant les opérateurs (3.23) à ρ, défini par (3.20), il vient :

$$(3.24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial n_P} = \dfrac{(X-x)\cos\Theta' + (Y-g)\sin\Theta'}{\rho} = \dfrac{\overline{0P}\cos(\varphi'-\Theta') - \overline{0M}\cos(\Theta'-\varphi)}{\rho} \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial n_M} = -\dfrac{(X-x)\cos\Theta + (Y-y)\sin\Theta}{\rho} = \dfrac{\overline{0M}\cos(\Theta-\varphi) - \overline{0P}\cos(\varphi'-\Theta)}{\rho} \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial s_M} = \dfrac{(X-x)\sin\Theta - (Y-y)\cdot\cos\Theta}{\rho} = \dfrac{\overline{0M}\sin(\varphi-\Theta) - \overline{0P}\sin(\varphi'-\Theta)}{\rho} \end{cases}$$

Il est nécessaire aussi de donner les formules de récurrences des dérivations successives de :

$$\frac{\partial\rho}{\partial n_P},\ \frac{\partial\rho}{\partial n_M},\ \frac{\partial\rho}{\partial s_M}$$

en ne faisant intervenir qu'un minimum de grandeurs nouvelles.

$$
(3.25)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial n_P}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial n_P}\right) = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial n_P^2} = -\dfrac{1}{\rho}\left[\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial n_P}\right)^2 - 1\right] \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial n_M}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial n_M}\right) = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial n_M^2} = -\dfrac{1}{\rho}\left[\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial n_M}\right)^2 - 1\right] \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial n_M}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial n_P}\right) = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial n_M \partial n_P} = -\dfrac{1}{\rho}\left[\cos(\theta' - \theta) + \dfrac{\partial \rho}{\partial n_M} \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial n_P}\right] \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial n_M}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial s_M}\right) = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial n_M \partial s_M} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial n_M} \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial s_M} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial s_M}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial s_M}\right) = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial s_M^2} = -\dfrac{1}{\rho}\left[\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial s_M}\right)^2 - 1\right] \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial s_M}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial n_P}\right) = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial s_M \partial n_P} = -\dfrac{1}{\rho}\left[\sin(\theta' - \theta) + \dfrac{\partial \rho}{\partial s_M} \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial n_P}\right]
\end{cases}
$$

De plus il faut noter les relations suivantes :

$$
(3.26)\qquad \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_M}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s_M}\right)^2 = \Delta \rho_M = 1
$$

$$
(3.27)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial s_M} \sin(\theta' - \theta) + \frac{\partial \rho}{\partial n_M} \cos(\theta' - \theta) = -\frac{\partial \rho}{\partial n_P}
$$

En résumé cette façon de procéder permet, avec un nombre réduit de grandeurs (faible encombrement des mémoires du calculateur)

$$
\rho\ ,\ F_1(\lambda\rho)\ ,\ F_2\ ,\ F_3\ ,\ F_4\ ,\ \frac{\partial \rho}{\partial n_P}\ ,\ \frac{\partial \rho}{\partial n_M}\ ,\ \frac{\partial \rho}{\partial s_M}\ ,\ \theta'\ ,\ \theta
$$

de formuler d'une manière systématique tous les coefficients A_{ij} utiles.

Cela étant, à partir des formules de définitions (3.6) et des formules (3.20), (3.21), (3.22), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) on peut donner, pour différentes valeurs de q_1 , q_2 , q_3 , q_4 (ordre des couches), les expressions analytiques générales des A_{ij} pour les conditions aux limites définies par (3.7).

3.4.2.- Expression des A_{ij} pour $q_1 = q_3 = 0$ et $q_2 = q_4 = 1$ (potentiels d'ordre 0 et 1).

En se reportant aux formules de définitions (3.6) et aux tableaux (3.8) et (3.9), nous avons :

$$A_{ij}^{r+m} = A_{ik}^{s+m} \qquad \text{si } i \neq j$$

$$A_{\ell k}^{u+m} = A_{\ell j}^{t+m} \qquad \text{si } \ell \neq j \quad , \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

En prenant $r = s = 1$, $u = t = 5$ et pour $i \neq j$ on a par définition :

$$(3.29) \quad \begin{cases} A_{ij}^{1} = A_{ik}^{1} = -\dfrac{1}{2\lambda^2} \displaystyle\int_{\Gamma_{j,k}} F_1(\lambda\rho)\,dP \\ A_{ij}^{2} = A_{ik}^{2} = -\dfrac{1}{2\lambda} \displaystyle\int_{\Gamma_{j,k}} F_2 \dfrac{\partial\rho}{\partial n_P}\,dP \\ A_{ij}^{3} = A_{ik}^{3} = \dfrac{1}{2\lambda} \displaystyle\int_{\Gamma_{j,k}} F_2 \dfrac{\partial\rho}{\partial n_M}\,dP \\ A_{ij}^{4} = A_{ik}^{4} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\Gamma_{j,k}} \left[F_3 \dfrac{\partial\rho}{\partial n_P} \dfrac{\partial\rho}{\partial n_M} + \dfrac{1}{\lambda\rho} F_2 \left(2 \dfrac{\partial\rho}{\partial n_P} \cdot \dfrac{\partial\rho}{\partial n_M} + \cos(\Theta' - \Theta)\right)\right] dP \end{cases}$$

Pour $\ell \neq k$ et en posant $1 - \nu = B$, il vient :

$$
(3.29)\quad
\begin{cases}
A^5_{\ell k} = A^5_{\ell j} = \dfrac{D}{2}\displaystyle\int_{\Gamma_{k,j}} \left[F_3\left(1 - B\left(\frac{\partial\rho}{\partial s_M}\right)^2\right) - \frac{B}{\lambda\rho} F_2 \left(2\left(\frac{\partial\rho}{\partial s_M}\right)^2 - 1\right)\right] dP \\[2ex]
A^6_{\ell k} = A^6_{\ell j} = \dfrac{\lambda D}{2}\displaystyle\int_{\Gamma_{k,j}} \left[F_4 \frac{\partial\rho}{\partial n_P}\left(1 - B\left(\frac{\partial\rho}{\partial s_M}\right)^2\right)\right. \\[2ex]
\qquad \left. - \frac{B}{\lambda\rho}\left(F_3 + \frac{2}{\lambda\rho} F_2\right)\left(4 \frac{\partial\rho}{\partial n_P}\left(\frac{\partial\rho}{s_M}\right)^2 - \frac{\partial\rho}{\partial n_P} + 2 \frac{\partial\rho}{\partial s_M} \sin(\Theta' - \Theta)\right)\right] dP \\[2ex]
A^7_{\ell k} = A^7_{\ell j} = -\dfrac{\lambda D}{2}\left\{ \displaystyle\int_{\Gamma_{k,j}} F_4 \frac{\partial\rho}{\partial n_M} dP - \frac{B}{\lambda} \frac{\partial}{\partial s_{P_\ell}} \int_{\Gamma_{k,j}} \left[\left(F_3 + \frac{2}{\lambda\rho} F_2\right) \frac{\partial\rho}{\partial s_M} \frac{\partial\rho}{\partial n_M}\right] dP \right. \\[2ex]
A^8_{\ell k} = A^8_{\ell j} = -\dfrac{\lambda^2 D}{2}\left\{ \displaystyle\int_{\Gamma_{k,j}} \left[F_1 \frac{\partial\rho}{\partial n_P} \frac{\partial\rho}{\partial n_M} + \frac{1}{\lambda\rho} F_4 \left(2 \frac{\partial\rho}{\partial n_P} \frac{\partial\rho}{\partial n_M} + \cos(\Theta' - \Theta)\right)\right] dP \right. \\[2ex]
\qquad - \frac{B}{\lambda} \frac{\partial}{\partial s_{P_\ell}} \displaystyle\int_{\Gamma_{k,j}} \left[F_4 \frac{\partial\rho}{\partial n_P} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial n_M} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial s_M} + \frac{1}{\lambda\rho}\left(F_3 + \frac{2}{\lambda\rho} F_2\right)\left(4 \frac{\partial\rho}{\partial n_P} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial n_M} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial s_M}\right.\right. \\[2ex]
\qquad \left.\left. + \sin(\Theta' - \Theta) \frac{\partial\rho}{\partial n_M} + \cos(\Theta' - \Theta) \frac{\partial\rho}{\partial s_M}\right)\right] dP \Bigg\}
\end{cases}
$$

Remarque 3.7.

Dans les expressions de $A^7_{\ell k}$ et $A^8_{\ell k}$ l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial s_{P_\ell}}$ se trouve placé à l'extérieur du signe intégral, on tient compte ainsi de la condition $\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s \partial^{o,1}_{n_P} G)$. La technique de calcul est alors la suivante : on évalue en premier lieu l'intégrale et dans un deuxième temps, lorsque le point M est au point de contrôle P_ℓ, on effectue la dérivation par rapport à P_ℓ.

Pour i = j et ℓ = k nous avons, par définition :

$$
(3.30)\quad
\begin{cases}
A^1_{ii} = -\dfrac{1}{2\lambda^2}\,\ell_1(P_i)\displaystyle\int_{\Gamma_j} F_1\,dP \\
\qquad \lim M\to P_i^- \\
A^2_{ii} = -\dfrac{1}{2\lambda}\,\ell_1(P_i)\displaystyle\int_{\Gamma_j} F_2\,\frac{\partial\rho}{\partial n_P}\,dP \\
\qquad \lim M\to P_i^- \\
A^3_{ii} = -\dfrac{1}{2\lambda^2}\,\ell_2(P_i)\displaystyle\int_{\Gamma_j} F_1\,dP \\
\qquad \lim M\to P_i^- \\
A^4_{ii} = -\dfrac{1}{2\lambda}\,\ell_2(P_i)\displaystyle\int_{\Gamma_j} F_2\,\frac{\partial\rho}{\partial n_P}\,dP \\
\qquad \lim M\to P_i^-
\end{cases}
\qquad i = j
$$

$$
(3.31)\quad
\begin{cases}
A^5_{\ell\ell} = -\dfrac{1}{2\lambda^2}\,\ell_3(P_\ell)\displaystyle\int_{\Gamma_k} F_1\,dP \\
\qquad \lim M\to P_\ell^- \\
A^6_{\ell\ell} = -\dfrac{1}{2\lambda}\,\ell_3(P_\ell)\displaystyle\int_{\Gamma_k} F_2\,\frac{\partial\rho}{\partial n_P}\,dP \\
\qquad \lim M\to P_\ell^- \\
A^7_{\ell\ell} = -\dfrac{1}{2\lambda^2}\,\ell_4(P_\ell)\displaystyle\int_{\Gamma_k} F_1\,dP \\
\qquad \lim M\to P_\ell^- \\
A^8_{\ell\ell} = -\dfrac{1}{2\lambda}\,\ell_4(P_\ell)\displaystyle\int_{\Gamma_k} F_2\,\frac{\partial\rho}{\partial n_P}\,dP \\
\qquad \text{Lim } M\to P_\ell^-
\end{cases}
\qquad \ell = k
$$

avec ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 , ℓ_4 donnés par (3.7).

Naturellement, dans le cas général on ne sait pas calculer exactement les intégrales (3.28), (3.29), (3.30, (3.31) et nous sommes conduits à en prendre des approximations. Le choix de l'approximation influencera directement le résultat de la résolution du problème, c'est-à-dire du système (3.5).

3.4.2.1.- Evaluation des coefficients $A^{1,2,3,4}_{ij}$ ou $A^{1,2,3,4}_{ik}$:

A priori nous n'avons aucune idée sur le choix d'un type d'approximation des intégrales (3.28). Toutefois, deux préoccupations peuvent nous guider.

1°) Prendre une approximation simple, de mise en oeuvre rapide, conduisant à un faible temps de calcul en machine.

2°) Pour un choix d'approximation donné avoir une convergence rapide et une erreur raisonnable sur le résultat.

Dans ce qui suit, nous proposons trois méthodes d'évaluation des A_{ij} et sur un exemple numérique nous comparerons ces méthodes, ce qui nous permettra de faire un choix du type d'approximation.

α) Découpage : P_j (ou P_k) centré sur Γ_j (ou Γ_k), P_i (ou P_ℓ) non centré.

Si le point de contrôle P_i n'est pas pris centré sur Γ_j : les points P_i et P_j ne sont jamais confondus et l'évaluation des intégrales (3.30) comme limite lorsque M tend vers P_i ne s'impose plus et on est ramené simplement au calcul de (3.28).

En première approximation nous pouvons prendre pour i et j quelconques

$$(3.32)\quad \begin{cases} \bar{A}^1_{ij} \sim -\dfrac{1}{2\lambda^2} F_1(\lambda\rho_{ij})\Gamma_j \\ \bar{A}^2_{ij} \sim -\dfrac{1}{2\lambda} F_2(\lambda\rho_{ij}) \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \Gamma_j \\ \bar{A}^3_{ij} \sim \dfrac{1}{2\lambda} F_2 \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} \Gamma_j \\ \bar{A}^4_{ij} \sim \dfrac{1}{2}\left\{ F_3 \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \cdot \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} + \dfrac{1}{\lambda\rho_{ij}} F_2\left[2 \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \cdot \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} + \cos(\Theta_j - \Theta_i)\right]\right\}\Gamma_j \end{cases}$$

Remarque 3.8.

Les coefficients $A^{1,2,3,4}_{ik}$ ont une forme identique aux formules (3.32), il suffit de remplacer l'indice j par k.

Nous verrons, sur un exemple numérique, que la méthode que nous venons de proposer quoique très fruste, donne déjà une bonne approximation du résultat.

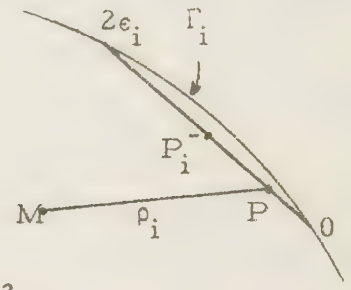
β) Découpage : P_j et P_i centrés sur les Γ_j.

Dans ce cas, les termes diagonaux $A^{1,2,3,4}_{ii}$ doivent être calculés par passage à la limite en se servant des intégrales (3.30).

Calcul des $A^{1,2,3,4}_{ii}$.

Dans ce calcul, pour s'affranchir de la forme plus ou moins compliquée du contour et de l'élément différentiel dP, nous remplaçons l'arc Γ_j (ou Γ_i) par

le segment de corde correspondant $2\varepsilon_j$ (ou $2\varepsilon_i$). Le point M est pris dans Ω, et P est le point courant du segment $2\varepsilon_j$ sur lequel on effectue la quadrature. En annexe 1 nous donnons les détails des calculs permettant d'obtenir les coefficients A_{ii}, d'où les résultats :



$$
(3.33)\quad
\begin{cases}
A^1_{ii} \sim \dfrac{\varepsilon_i}{\lambda}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\Pi}\left\{\dfrac{z_i^2}{3}(\log z_i+\gamma-\dfrac{4}{3})+\dfrac{z_i^6}{252}(\log z_i+\gamma-\dfrac{83}{42})\right. \\
\qquad\left.+\dfrac{z_i^{10}}{158400}(\log z_i+\gamma-\dfrac{1567}{660})+\ldots\right\}+\dfrac{i}{4}\cdot\dfrac{\varepsilon_i}{\lambda}\left\{1-\dfrac{z_i^2}{3}\right. \\
\qquad\left.+\dfrac{z_i^4}{20}-\dfrac{z_i^6}{252}+\dfrac{z_i^8}{5184}-\dfrac{z_i^{10}}{158400}+\ldots\right\} \qquad (3.33.1)\\
A^2_{ii} \sim 0 \qquad (3.33.2)\\
A^3_{ii} \sim 0 \qquad (3.33.3)\\
A^4_{ii} \sim \dfrac{\varepsilon_i}{2\Pi}\left\{\log z_i+\gamma-\dfrac{3}{2}+\dfrac{z_i^4}{60}(\log z_i+\gamma-\dfrac{28}{15})+\dfrac{z_i^8}{25920}(\log z_i+\gamma-\dfrac{413}{180})+\ldots\right\} \\
\qquad -\dfrac{i}{4}\dfrac{\varepsilon_i}{2}\left\{1-\dfrac{z_i^2}{6}+\dfrac{z_i^4}{60}-\dfrac{z_i^6}{1008}+\dfrac{z_i^8}{25920}\ldots\right\} \qquad (3.33.4)
\end{cases}
$$

avec $z_i = \dfrac{\lambda\varepsilon_i}{2}$, γ : constante d'Euler.

Calcul des A_{ij}.

Nous remplaçons là encore l'élément d'arc Γ_j par la corde correspondante de longueur $2\varepsilon_j$. C'est-à-dire que l'on traite une plaque de forme polygonale le polygone équivalent devant s'adapter le mieux possible au contour réel de la plaque. Cette façon de procéder, qui n'a pas reçu jusqu'ici de justification mathématique rigoureuse, permet de s'affranchir, d'une certaine façon, de formes particulières de plaques : courbes à raccordement tangent, point de rebroussement ; et surtout conduit à simplifier notablement les calculs tout en donnant une valeur générale aux formules employées.

Remarque 3.9.

Si le rapport flèche/rayon de courbure moyenne de Γ_j est inférieur à 1% ou le rapport flèche/corde inférieur à 4%, l'approximation du contour est déjà bonne. En effet, nous l'avons vérifié expérimentalement pour une plaque ayant la forme d'un polygone régulier de 20 côtés (flèche/rayon = 1,23%, flèche/corde ~ 4 %) : l'erreur sur les fréquences propres de la plaque polygonale par rapport à celles de la plaque circulaire correspondante est inférieure à 1%, ce qui est largement suffisant pour la plupart des problèmes pratiques. Naturellement, l'écart de fréquence est par excès : la plaque étant légèrement plus petite vibre plus "aigue".

Pour les expressions des A_{ij} (ou A_{ik}) nous pouvons prendre, en première approximation, une forme identique aux formules (3.32) en remplaçant Γ_j par $2\epsilon_j$, c'est-à-dire :

$$
(3.34)\quad \begin{cases}
A^1_{ij} \sim -\dfrac{\epsilon_j}{\lambda^2} F_1(\lambda\rho_{ij}) & (3.34.1)\\[2ex]
A^2_{ij} \sim -\dfrac{\epsilon_j}{\lambda} F_2 \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} & (3.34.2)\\[2ex]
A^3_{ij} \sim \dfrac{\epsilon_j}{\lambda} F_2 \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} & (3.34.3)\\[2ex]
A^4_{ij} \sim \epsilon_j \left\{ F_3 \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} + \dfrac{1}{\lambda\rho_{ij}} F_2 \left[2 \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \dfrac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} + \cos(\Theta_j - \Theta_i) \right] \right\} & (3.34.4)
\end{cases}
$$

ou encore une forme plus recherchée, de mise en oeuvre plus laborieuse, faisant intervenir la quadrature effective des intégrales (3.28). Pour cela, le point M étant dans Ω, on développe en série d'ondes cylindriques les divers noyaux et on fait les intégrations. Tous calculs faits, il vient :

$$
(3.35)\quad
\begin{cases}
\tilde{A}^{1}_{ij} \sim -\dfrac{\epsilon_j}{\lambda^2}\left\{C_o(\lambda R_{ij}) + C_2\cos 2\alpha_{ij} + C_4\cos 4\alpha_{ij} \ldots\right\} \\[2ex]
\tilde{A}^{2}_{ij} \sim -\dfrac{\epsilon_j}{\lambda}\left\{C_1(\lambda R_{ij})\sin\alpha_{ij} + C_3\sin 3\alpha_{ij} + C_5\sin 5\alpha_{ij} \ldots\right\} \\[2ex]
\tilde{A}^{3}_{ij} \sim \dfrac{\epsilon_j}{\lambda}\left\{\left[\overline{C}_o(\lambda R_{ij}) + \overline{C}_2\cos 2\alpha_{ij} + \overline{C}_4\cos 4\alpha_{ij} + \ldots\right]\dfrac{\partial R_{ij}}{\partial n_{P_i}}\right. \\
\qquad \left. + \dfrac{1}{\lambda R_{ij}}\left[C_2 f_2(\alpha_{ij}) + C_4 f_4(\alpha_{ij}) + \ldots\right]\right\} \\[2ex]
\tilde{A}^{4}_{ij} \sim e_j\left\{\left[\overline{C}_1\sin\alpha_{ij} + \overline{C}_3\sin 3\alpha_{ij} + \overline{C}_5\sin 5\alpha_{ij} + \ldots\right]\dfrac{\partial R_{ij}}{\partial n_{P_i}}\right. \\
\qquad \left. + \dfrac{1}{\lambda R_{ij}}\left[C_1 f_1(\alpha_{ij}) + C_3 f_3(\alpha_{ij}) + C_5 f_5(\alpha_{ij}) + \ldots\right]\right\}
\end{cases}
$$

Les détails de calculs des formules (3.35) et les expressions des C_n, $\overline{C}_n$, $f_n(\alpha_{ij})$ se trouvent dans l'annexe 2.

En résumé, nous avons proposé trois méthodes d'évaluations des A_{ij} (ou A_{ik}).

La première, que nous appellerons méthode A, consiste à prendre pour les coefficients $\tilde{A}^{1,2,3,4}_{ij}$ les formules (3.32)

La deuxième distingue le cas où i = j (termes diagonaux de celui où $i \neq j$, le calcul des $A^{1,2,3,4}_{ii}$ se fait par intégration d'un développement en série (formules (3.33)), et on se contente d'une première approximation pour les $A^{1,2,3,4}_{ij}$ (formules (3.34)) : c'est la méthode B.

Enfin, la troisième méthode conserve pour l'évaluation des termes diagonaux les formules (3.33) et fait appel à une approximation plus fine que précédemment pour le calcul des coefficients $\tilde{A}^{1,2,3,4}_{ij}$ (formules (3.35)) : c'est la méthode C.

Ces trois méthodes (A, B, C), de complexité croissante, donnent des résultats numériques de précision allant naturellement en s'améliorant. Le facteur temps de calcul en machine intervient lui aussi, et pour un même nombre de points de découpage, la méthode la plus complexe est la plus onéreuse.

Sur un exemple numérique simple (chapitre 4) nous comparerons ces trois méthodes et nous pouvons déjà annoncer que la méthode B, pour une précision suffisante et un temps de calcul acceptable, est la plus intéressante. C'est donc sur ce modèle que nous calculerons les coefficients suivants.

Naturellement, toutes les formules que nous venons de donner ((3.32), (3.33), (3.34) et (3.35)) sont générales et s'appliquent à n'importe quelle forme de plaque. Il suffit, pour un découpage donné du bord, de connaître les différents ϵ_j , ρ_{ij} ou R_{ij} , α_{ij} , Θ_j , Θ_i.

3.4.2.2.- Evaluation des coefficients $A_{\ell k}^{5,6,7,8}$ (ou $A_{\ell j}^{5,6,7,8}$).

Nous prenons désormais P_k (ou P_j) centré sur Γ_k (Γ_j) et le point de contrôle P_ℓ centré lui aussi.

Dans ce cas, les termes diagonaux $A_{\ell\ell}$ ($\ell = k$) du déterminant principal de (3.5) doivent être calculés par passage à la limite par les formules (3.31).

Calcul des $A_{\ell\ell}^{5,6,7,8}$.

La technique de calcul est la même que celle employée pour le calcul des $A_{ii}^{1,2,3,4}$ (le développement en est donné dans l'annexe 3) ; nous obtenons :

$$
(3.36)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_{\ell\ell}^{5} \sim & -\frac{D\epsilon_\ell}{\Pi}\Big\{\log z_\ell + \gamma - 1 + \frac{z_\ell^4}{20}\Big(\log z_\ell + \gamma - \frac{17}{10}\Big) + \frac{z_\ell^8}{5184}\Big(\log z_\ell + \gamma - \frac{79}{36}\Big) \\
& + \ldots - \frac{(1-\nu)}{2}\Big[\log z_\ell + \gamma - \frac{3}{2} + \frac{z_\ell^4}{60}\Big(\log z_\ell + \gamma - \frac{28}{15}\Big) + \\
& + \frac{z_\ell^8}{25920}\Big(\log z_\ell + \gamma - \frac{413}{180}\Big) + \ldots\Big]\Big\} + \frac{i}{4} D\epsilon_\ell \Big\{1 - \frac{z_\ell^2}{3} + \frac{z_\ell^4}{20} - \frac{z_\ell^6}{252} + \frac{z_\ell^8}{5184} \cdots \\
& - \frac{1-\nu}{2}\Big[1 - \frac{z_\ell^2}{6} + \frac{z_\ell^4}{60} - \frac{z_\ell^6}{1008} + \frac{z_\ell^8}{25920} \cdots\Big]\Big\} \qquad (3.36.1) \\
A_{\ell\ell}^{6} \sim & \frac{D}{2} \qquad (3.36.2) \\
A_{\ell\ell}^{7} \sim & \frac{D}{2} \qquad (3.32.3)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3.37)\quad
\begin{cases}
\bar{A}^8_{\ell\ell} \sim -\dfrac{D\epsilon_\ell}{\Pi}\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{-\dfrac{1}{z_\ell^2}+\dfrac{z_\ell^2}{3}(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{19}{12})+\dfrac{z_\ell^6}{504}(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{353}{168})+\ldots\right\} \\
\qquad -\dfrac{i}{4}D\epsilon_\ell\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{2-\dfrac{z_\ell^2}{3}+\dfrac{z_\ell^4}{30}-\dfrac{z_\ell^6}{504}\ldots\right\}-D(1-\nu)\bar{Q} \qquad (3.37.1) \\
\tilde{A}^8_{\ell\ell} \sim -\dfrac{D\epsilon_\ell}{\Pi}\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{-\dfrac{1}{z_\ell^2}+\dfrac{z_\ell^2}{3}(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{19}{12})+\dfrac{z_\ell^6}{504}(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{353}{168})+\ldots\right\} \\
\qquad -\dfrac{i}{4}D\epsilon_\ell\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{2-\dfrac{z_\ell^2}{3}+\dfrac{z_\ell^4}{30}-\dfrac{z_\ell^6}{504}\ldots\right\}-D(1-\nu)\tilde{Q} \qquad (3.37.2) \\
A^8_{\ell\ell} \sim -\dfrac{D\epsilon_\ell}{\Pi}\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{-\dfrac{1}{z_\ell^2}+\dfrac{z_\ell^2}{3}(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{19}{12})+\dfrac{z_\ell^6}{504}(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{353}{168})+\ldots\right\} \\
\qquad -\dfrac{i}{4}D\epsilon_\ell\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{2-\dfrac{z_\ell^2}{3}+\dfrac{z_\ell^4}{30}-\dfrac{z_\ell^6}{504}\ldots\right\}-D(1-\nu)Q \qquad (3.37.3)
\end{cases}
$$

les expression de $\bar{Q}$, $\tilde{Q}$, Q sont données dans l'annexe 3.

Remarque 3.10.

$\bar{Q}$, $\tilde{Q}$, Q représentent les résultats du calcul de :

$$
\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell^-}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M}\int_0^{2\epsilon_i}\partial_{n_P}G(\lambda|M-P|)dP\right\}
\lim M\to P_o
$$

acec $P_o \in (0, 2\epsilon_i)$, $M \in \Omega$, P_i^- milieu de $(0, 2\epsilon_i)$.

Cette expression ne pouvant être déterminée qu'imparfaitement, nous avons été conduits à en prendre 3 estimations différentes (voir annexe 3) engendrant les trois coefficients $\bar{A}^8_{\ell\ell}$, $\tilde{A}^8_{\ell\ell}$, $A^8_{\ell\ell}$. Sur un exemple numérique nous montrerons les divers résultats trouvés en prenant tour à tour chacun de ces coefficients.

Calcul des $A^{5,6,7}_{\ell k}$ (ou $A^{5,6,7}_{\ell j}$).

Nous prenons pour approximation des intégrales (3.29) une approximation semblable à celle des formules (3.34), $2\varepsilon_k$ représente toujours la longueur de la corde de l'arc Γ_k et $B = 1 - \nu$, il vient :

$$
(3.38)\quad \begin{cases}
A^5_{\ell k} \sim D\varepsilon_k \left\{F_3\left[1 - B\left(\dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2\right] - \dfrac{B}{\lambda \rho_{\ell k}} F_2\left[2\left(\dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 - 1\right]\right\} & (3.38.1)\\[2ex]
A^6_{\ell k} \sim D\lambda\varepsilon_k \left\{F_4 \dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_k}}\left[1 - B\left(\dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2\right]\right. & \\
\left. - \dfrac{B}{\lambda \rho_{\ell k}}\left(F_3 + \dfrac{2}{\lambda \rho_{\ell k}} F_2\right)\left[4 \dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_k}}\left(\dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 - \dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_k}} + 2 \dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} \sin(\Theta_k - \Theta_\ell)\right]\right\} & (3.38.2)\\[2ex]
A^7_{\ell k} \sim - D\lambda\varepsilon_k F_4 \dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} + D\varepsilon_k B \dfrac{\partial}{\partial s_{P_\ell}}\left\{\left(F_3 + \dfrac{2}{\lambda \rho_{\ell k}} F_2\right)\dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} \cdot \dfrac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial s_{P_\ell}}\right\} & (3.38.3)
\end{cases}
$$

Remarque 3.11.

Pour tenir compte de la condition aux limites $\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s u)$, il convient de poser symboliquement l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial s_{P_\ell}}$; en effet cette opération de dérivation dépend de chaque point P_ℓ du contour, c'est-à-dire de la forme de la plaque et doit donc être explicitée dans chaque cas particulier de contour.

Calcul de $A^8_{\ell k}$.

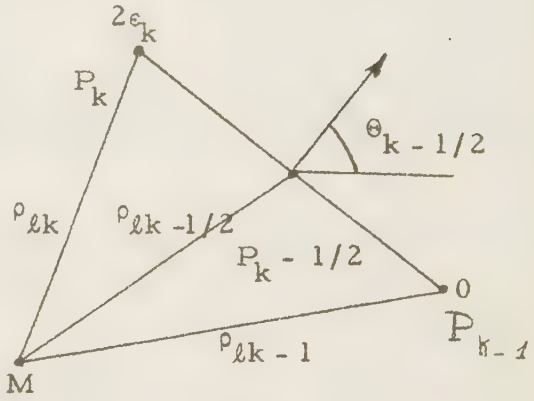
A partir des résultats (3.37), nous constatons que les termes diagonaux sont inversements proportionnels à la longueur du pas de découpage ($2\varepsilon_k$) et à λ. C'est-à-dire si nous prenons comme évaluation des termes non diagonaux $A^8_{\ell k}$ une approximation semblable à celle des termes $A^{5,6,7}_{\ell k}$, c'est-à-dire une approximation grossière, l'erreur relative sur les $A^8_{\ell k}$ par rapport aux $A^8_{\ell\ell}$ va croître avec la finesse du découpage et sera d'autant plus forte que λ est petit (basses fréquences) ; il s'ensuit que le processus de calcul numérique n'est plus convergent. Pour remédier à cet inconvénient il convient de prendre pour l'évaluation des $A^8_{\ell k}$, une meilleure approximation que pour les termes $A^{5,6,7}_{\ell k}$; il est à remarquer que M. F. Cassot a rencontré dans sa thèse de troisième cycle [16] une pareille difficulté.

Nous choisissons donc une approximation à trois points, du type Simpson [17], pour évaluer l'intégrale, c'est-à-dire

$$I = \int_a^b f(x)dx \sim \frac{b-a}{6}\left[f(a)+f(b)+4f(c)\right]$$

avec $c = \frac{a+b}{2}$

Pour le segment $(0, 2\varepsilon)$ le point milieu, que nous désignions auparavant par P_k, est $P_{k-1/2}$ et P_{k-1}, P_k sont les points extrêmes. Le point de contrôle P_ℓ est unique et se trouve toujours au milieu du segment $(0, 2\varepsilon_k)$.



Si $M \to P_\ell$ on désignera par :

$$\rho_{\ell k} = |P_\ell - P_k|\ ,\ \rho_{\ell k-1/2} = |P_\ell - P_{k-1/2}|\ ,\ \rho_{\ell k-1} = |P_\ell - P_{k-1}|\ ,$$

et par :

$$(3.39)\quad \begin{cases} F_{11} = \frac{1}{2\Pi} K_o(\lambda\rho_{\ell k}) + \frac{1}{4} Y_o(\lambda\rho_{\ell k}) - \frac{i}{4} J_o(\lambda\rho_{\ell k}) \\ F_{12} = \frac{1}{2\Pi} K_o(\lambda\rho_{\ell k-1/2}) + \frac{1}{4} Y_o(\lambda\rho_{\ell k-1/2}) - \frac{i}{4} J_o(\lambda\rho_{\ell k-1/2}) \\ F_{13} = \frac{1}{2\Pi} K_o(\lambda\rho_{\ell k-1}) + \frac{1}{4} Y_o(\lambda\rho_{\ell k-1}) - \frac{i}{4} J_o(\lambda\rho_{\ell k-1}) \end{cases}$$

nous définirons de la même manière F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}, F_{41}, F_{42}, F_{43} à partir des formules (3.21) et les dérivées normales et tangentes de $\rho_{\ell k}$, $\rho_{\ell k-1/2}$, $\rho_{\ell k-1}$; d'autre part $\Theta_k = \Theta_{k-1/2} = \Theta_{k-1}$.

En appliquant la formule de Simpson et en tenant compte des notations définies ci-dessus il vient pour le coefficient $A^8_{\ell k}$:

$$
\begin{aligned}
A^{8}_{\ell k} \sim -\frac{D\lambda^2 \epsilon_k}{6} \Bigg\{ & F_{11} \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_k}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} + F_{13} \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial n_{P_{k-1}}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial n_{P_\ell}} \\
& + 4F_{12} \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{k-\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_\ell}} + \frac{1}{\lambda \rho_{\ell k}} F_{41} \Bigg[\cos(\Theta_k - \Theta_\ell) \\
& + 2 \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_k}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} \Bigg] + \frac{1}{\lambda \rho_{\ell k-1}} F_{43} \Bigg[\cos(\Theta_k - \Theta_\ell) + 2 \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial n_{P_{k-1}}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial n_{P_\ell}} \Bigg] \\
& + \frac{4}{\lambda \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}} F_{42} \Bigg[\cos(\Theta_k - \Theta_\ell) + 2 \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{k-\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_\ell}} \Bigg] \Bigg\} \\
& + \frac{D\lambda \epsilon_k B}{6} \frac{\partial}{\partial s_{P_\ell}} \Bigg\{ F_{41} \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_k}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial s_{P_\ell}} + F_{43} \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial n_{P_{k-1}}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial n_{P_\ell}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial s_{P_\ell}} \\
& + 4F_{42} \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{k-\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_\ell}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial s_{P_\ell}} \\
& + \frac{1}{\lambda \rho_{\ell k}} \left(F_{31} + \frac{2}{\lambda \rho} F_{21}\right) \Bigg[4 \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_k}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial s_{P_\ell}} + \cos(\Theta_k - \Theta_\ell) \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial s_{P_\ell}} \\
& + \sin(\Theta_k - \Theta_\ell) \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} \Bigg] + \frac{1}{\lambda \rho_{\ell k-1}} \left(F_{33} + \frac{2}{\lambda \rho_{\ell k-1}} F_{23}\right) \Bigg[4 \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial n_{P_{k-1}}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial n_{P_\ell}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial s_{P_\ell}} \\
& + \cos(\Theta_k - \Theta_\ell) \frac{\partial \rho_{\ell k-1}}{\partial s_{P_\ell}} + \sin(\Theta_k - \Theta_\ell) \frac{\partial \rho_{\ell k}}{\partial n_{P_\ell}} \Bigg] \\
& + \frac{4}{\lambda \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}} \left(F_{32} + \frac{2}{\lambda \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}} F_{22}\right) \Bigg[4 \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{k-\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_\ell}} \cdot \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial s_{P_\ell}} \\
& + \cos(\Theta_k - \Theta_\ell) \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial s_{P_\ell}} + \sin(\Theta_k - \Theta_\ell) \frac{\partial \rho_{\ell k-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_\ell}} \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

L'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial s_P}$ de (3.40) à même signification que dans la remarque 3.11.

Remarque 3.12.

Le coefficient $A^{8}_{\ell j}$ se calcule de la même façon que $A^{5,6,7}_{\ell j}$ car il n'existe pas, dans ce cas, de termes diagonaux ($\ell = j$).

Remarque 3.13.

Chaque fois qu'il existe des termes diagonaux ($\ell = k$ ou $i = j$) croissant lorsque l'intervalle de découpage décroit (c'est le cas pour un ordre de dérivation ≥ 4 : ordre de potentiel de couche plus ordre de dérivation entrant dans la condition aux limites) nous serons obligés, pour calculer les termes voisins de la diagonale, ($\ell \neq k$ ou $i \neq j$) d'utiliser une méthode plus précise d'approximation comme il a été fait, par exemple, pour la formule (3.40).

3.4.3. - $q_1 = 2$, $q_3 = 0$, $q_2 = 3$, $q_4 = 1$ (potentiels d'ordre 2, 0, 3, 1

En se reportant aux formules (3.6) et aux tableaux (3.8) et (3.9) nous constatons que, pour m = 0, 1, 2, 3, que :

- les A^{s+m}_{ik} sont les mêmes que les A^{1+m}_{ik} dont une approximation est donnée par les formules (3.34) en changeant j en k.

- les $A^{u+m}_{\ell k}$ sont les mêmes que les $A^{5+m}_{\ell k}$ dont une approximation est donnée par les formules (3.36) et (3.37) pour $\ell = k$ et par (3.38.1), (3.38.2), (3.38.3) et (3.40) pour $\ell \neq k$.

En conséquence : s = 1, u = 5 et nous posons r = 9 et t = 13, par définition nous avons :
pour i = j :

$$
(3.41)\quad \begin{cases}
A^{9}_{ii} = \ell_1(M) \underset{\lim M \to P_i^-}{\displaystyle\int_{\Gamma_i}} \delta^{2}_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\
A^{10}_{ii} = -\ell_1(M) \underset{\lim M \to P_i^-}{\displaystyle\int_{\Gamma_i}} \delta^{3}_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\
A^{11}_{ii} = \ell_2(M) \underset{\lim M \to P_i^-}{\displaystyle\int_{\Gamma_i}} \delta^{2}_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\
A^{12}_{ii} = \ell_2(M) \underset{\lim M \to P_i^-}{\displaystyle\int_{\Gamma_i}} \delta^{3}_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP
\end{cases}
$$

et pour $i \neq j$

$$(3.42)\quad \begin{cases} A_{ij}^{9} = \int_{\Gamma_j} \ell_1(P_i)\,\delta^2_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\ A_{ij}^{10} = -\int_{\Gamma_j} \ell_1(P_i)\,\delta^3_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\ A_{ij}^{11} = \int_{\Gamma_j} \ell_2(P_i)\,\delta^2_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\ A_{ij}^{12} = -\int_{\Gamma_j} \ell_2(P_i)\,\delta^3_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \end{cases}$$

Pour les coefficients $A_{\ell j}^{13,\,14,\,15,\,16}$ il n'y a pas lieu de distinguer le cas où $\ell = j$ de celui de $\ell \neq j$, en effet ℓ et j n'ont jamais la même valeur ($\ell = n_1+1$, n_1+2, ..., n , $j = 1, 2, \ldots, n_1$)

$$(3.43)\quad \begin{cases} A_{\ell j}^{13} = \int_{\Gamma_j} \ell_3(P_\ell)\,\delta^2_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\ A_{\ell j}^{14} = -\int_{\Gamma_j} \ell_3(P_\ell)\,\delta^3_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\ A_{\ell j}^{15} = -\int_{\Gamma_j} \ell_4(P_\ell)\,\delta^2_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \\ A_{\ell j}^{16} = -\int_{\Gamma_j} \ell_4(P_\ell)\,\delta^3_{n_P} G(\lambda|M-P|)dP \end{cases}$$

les opérateurs de conditions aux limites ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 , ℓ_4 ont la même signification qu'en (3.7).

3.4.3.1.- Evaluation des coefficients $A_{ij}^{9,\,10,\,11,\,12}$.

Calcul de $A_{ii}^{9,\,10,\,11,\,12}$.

On procède de la même façon que pour les termes diagonaux précédents, il vient :

$$
(3.44)\quad
\begin{cases}
A_{ii}^{9} \sim \dfrac{\epsilon_i}{2\Pi}\left\{\log z_i+\gamma-\dfrac{3}{2}+\dfrac{z_i^4}{60}\left(\log z_i+\gamma-\dfrac{28}{15}\right)+\dfrac{z_i^8}{25920}\left(\log z_i+\gamma-\dfrac{413}{180}\right)\right. \\
\qquad \left.+\ldots\right\}-\dfrac{i}{4}\dfrac{\epsilon_i}{2}\left\{1-\dfrac{z_i^2}{6}+\dfrac{z_i^4}{60}-\dfrac{z_i^6}{1008}+\dfrac{z_i^8}{25920}\cdots\right\} & (3.44.1) \\
A_{ii}^{10} \sim -\dfrac{1}{2} & (3.44.2) \\
A_{ii}^{11} \sim -\dfrac{1}{2} & (3.44.3) \\
A_{ii}^{12} \sim \dfrac{\lambda^2}{4}\dfrac{\epsilon_i}{\Pi}\left\{-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{z_i^2}+\dfrac{z_i^2}{6}\left(\log z_i+\gamma-\dfrac{7}{4}\right)+\dfrac{z_i^6}{1680}\left(\log z_i+\gamma-\dfrac{1849}{840}\right)\right. \\
\qquad \left.+\ldots\right\}+\dfrac{i}{4}\dfrac{\lambda^2}{4}\epsilon_i\left\{\dfrac{3}{2}-\dfrac{z_i^2}{6}+\dfrac{z_i^4}{80}-\dfrac{z_i^6}{1680}\cdots\right\} & (3.44.4)
\end{cases}
$$

Dans l'annexe 4 se trouve le détail du calcul permettant d'établir les formules (3.44).

Evaluation des $A_{ij}^{9,10,11,12}$.

Nous prenons pour les $A_{ij}^{9,10,11}$ l'approximation la plus simple déjà définie. Pour les A_{ij}^{12}, afin de tenir compte de la remarque 3.13, nous prenons une approximation plus fine pour l'évaluation des intégrales par exemple la méthode de Simpson. Compte tenu de cela, il vient :

(3.45)

$$A_{ij}^{9} \sim -\epsilon_j \left\{ F_3 \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^2 + \frac{1}{\lambda \rho_{ij}} F_2 \left[2 \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^2 - 1 \right] \right\} \tag{3.45.1}$$

$$A_{ij}^{10} \sim -\lambda \epsilon_j \left\{ F_4 \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^3 + \frac{1}{\lambda \rho_{ij}} \left(F_3 + \frac{2}{\lambda \rho_{ij}} F_2 \right) \left[4 \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^3 - 3 \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}} \right] \right\} \tag{3.45.2}$$

$$A_{ij}^{11} \sim \lambda \epsilon_j \left\{ F_4 \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}} \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_i}} + \frac{1}{\lambda \rho_{ij}} \left(F_3 + \frac{2}{\lambda \rho_{ij}} F_2 \right) \left[4 \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}} \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_i}} + 2\cos(\theta_j - \theta_i) \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}} - \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_i}} \right] \right\} \tag{3.45.3}$$

$$\begin{aligned} A_{ij}^{12} \sim \frac{\lambda^2 \epsilon_j}{6} \Bigg\{ & F_{11} \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^3 \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} + \frac{1}{\lambda \rho_{ij}} F_{41} \left[8 \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^3 \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} + 3\cos(\theta_j - \theta_i) \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^2 \right. \\ & \left. - 3 \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} \right] + \frac{1}{\lambda^2 \rho_{ij}^2} \left(F_{31} + \frac{2}{\lambda \rho_{ij}} F_{21} \right) \left[24 \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^3 \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} + 12\cos(\theta_j - \theta_i) \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \right)^2 \right. \\ & \left. - 12 \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} \cdot \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} - 3(\theta_j - \theta_i) \right] + 4 F_{12} \left(\frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j - \frac{1}{2}}}} \right)^3 \frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_i}} \\ & + \frac{4}{\lambda \rho_{ij - \frac{1}{2}}} F_{42} \left[8 \left(\frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j - \frac{1}{2}}}} \right)^3 \frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_i}} + 3\cos(\theta_j - \theta_i) \left(\frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j - \frac{1}{2}}}} \right)^2 \right. \\ & \left. - 3 \frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j - \frac{1}{2}}}} \frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_i}} \right] + \frac{4}{\lambda^2 \rho_{ij - \frac{1}{2}}^2} \left(F_{32} + \frac{2}{\lambda \rho_{ij - \frac{1}{2}}} F_{22} \right) \left[24 \left(\frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j - \frac{1}{2}}}} \right)^3 \frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_i}} \right. \\ & \left. + 12\cos(\theta_j - \theta_i) \left(\frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j - \frac{1}{2}}}} \right)^2 - 12 \frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j - \frac{1}{2}}}} \frac{\partial \rho_{ij - \frac{1}{2}}}{\partial n_{P_i}} - 3\cos(\theta_j - \theta_i) \right] \\ & + F_{13} \left(\frac{\partial \rho_{ij - 1}}{\partial n_{P_{j - 1}}} \right)^3 \frac{\partial \rho_{ij - 1}}{\partial n_{P_i}} + \frac{1}{\lambda \rho_{ij - 1}} \cdot F_{43} \left[8 \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_{j - 1}}} \right)^3 \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_i}} + 3\cos(\theta_j - \theta_i) \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_{j - 1}}} \right) \right. \\ & \left. - 3 \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_{j - 1}}} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_i}} \right] + \frac{1}{\lambda^2 \rho_{ij - 1}^2} \left(F_{33} + \frac{2}{\lambda \rho_{ij - 1}} F_{23} \right) \left[24 \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_{j - 1}}} \right)^3 \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_i}} \right. \\ & \left. + 12\cos(\theta_j - \theta_i) \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_{j - 1}}} \right)^2 - 12 \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_{j - 1}}} \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_i}} - 3\cos(\theta_j - \theta_i) \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.45.4}$$

3.4.3.2.- Evaluation des $A_{\ell j}^{13,14,15,16}$.

ℓ et j ne pouvant jamais être égaux, il n'y a donc pas lieu de considérer de termes diagonaux ($\ell = j$) et dans ce cas nous pouvons nous contenter, bien que l'ordre de dérivation soit élevé, de prendre l'approximation la plus simple pour exprimer les coefficients $A_{\ell j}^{13,14,15,16}$, il vient :

$$
\begin{aligned}
(3.46.1)\quad A_{\ell j}^{13} \sim D\lambda^2 \epsilon_j \Bigg\{ & F_1 \left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}}\right)^2 \left[1 - B\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2\right] + \frac{1}{\lambda\rho} F_4 \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^2 \right. \\
& - B\left(8\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_j}}\right)^2 + 4\sin(\theta_j - \theta_\ell)\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_\ell}} - \frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2\right] \\
& - \frac{B}{\lambda^2\rho^2}\left(F_3 + \frac{2}{\lambda\rho} F_2\right)\left[24\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 + 16\sin(\theta_j - \theta_\ell)\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right. \\
& \left. \left. - 4\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 - 4\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^2 - 2\sin(\theta_j - \theta_\ell) + 1\right]\right\}
\end{aligned}
$$

avec $B = 1 - \nu$.

$$
\begin{aligned}
(3.46.2)\quad A_{\ell j}^{14} \sim D\lambda^2 \epsilon_j \Bigg\{ & F_2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^2 \left[1 - B\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2\right] + \frac{F_1}{\lambda\rho}\left[4\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^3 - 3\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right. \\
& - B\left(12\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^3\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 - 3\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 - \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^3 + 6\sin(\theta_j - \theta_\ell)\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^2\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right] \\
& + \frac{F_4}{\lambda^2\rho^2}\left[8\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^3 - 6\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}} - B\left(72\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^3\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 + 48\sin(\theta_j - \theta_\ell)\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^2\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right.\right. \\
& - 6\sin(\theta_j - \theta_\ell)\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}} + 6\sin^2(\theta_j - \theta_\ell)\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}} - 24\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 - 8\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^3 \\
& \left.\left. + 3\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_\ell}}\right)\right] - \frac{B}{\lambda^3\rho^3}\left(F_3 + \frac{2}{\lambda\rho} F_2\right)\left[192\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^3\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2\right. \\
& + 144\sin(\theta_j - \theta_\ell)\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}} - 72\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}}\right)^2 - 24\sin(\theta_j - \theta_\ell)\frac{\partial \rho}{\partial s_{P_\ell}} \\
& \left.\left. - 24\left(\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right)^3 + 24\sin^2(\theta_j - \theta_\ell)\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}} + 12\frac{\partial \rho}{\partial n_{P_j}}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
(3.46.3)\quad
\begin{cases}
A^{15}_{\ell j} \sim -D\lambda^3\varepsilon_j\Big\{F_2\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}+\frac{1}{\lambda\rho}\Big(F_1+\frac{2}{\lambda\rho}F_4\Big)\Big[4\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}-\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\\
\quad +2\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}-\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\Big]\Big\}+D\lambda^2B\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell}}\Big\{F_1\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\\
\quad +\frac{F_4}{\lambda\rho}\Big[8\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}+2\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}+2\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\\
\quad -\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}+\frac{1}{\lambda^2\rho^2}\Big(F_3+\frac{2}{\lambda\rho}F_2\Big)\Big[24\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}+8\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\\
\quad -8\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}-4\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}-2\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big]\Big\}
\end{cases}
$$

$$
(3.46.4)\quad
\begin{cases}
A^{16}_{\ell j} \sim -D\lambda^4\varepsilon_j\Big\{F_3\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^3\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}+\frac{F_2}{\lambda\rho}\Big[8\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^3\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}+3\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\\
\quad -3\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\Big]+\frac{1}{\lambda^2\rho^2}\Big(F_1+\frac{2}{\lambda\rho}F_4\Big)\Big[24\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^3\cdot\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}-12\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}-3\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\\
\quad +12\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\Big]\Big\}+DB\lambda^3\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell}}\Big\{F_2\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^3\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\\
\quad +\frac{3F_1}{\lambda\rho}\Big[4\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^3\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}+\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}+\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\\
\quad -\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\Big]+\frac{3F_4}{\lambda^2\rho^2}\Big[24\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^3\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}+8\Big(\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\\
\quad +\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}-\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\Big)+2\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\\
\quad -\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}-\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\Big]+\frac{12}{\lambda^2\rho^2}\Big(F_3+\frac{2}{\lambda\rho}F_2\Big)\Big(16\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^3\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\\
\quad +6\Big(\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}+\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\Big)^2\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}-\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}\Big)\\
\quad +2\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_j}}-\cos(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial s_{P_\ell}}-\sin(\Theta_j-\Theta_\ell)\frac{\partial\rho}{\partial n_{P_\ell}}\Big]\Big\}
\end{cases}
$$

dans les formules (3.46.3) et (3.46.4) le symbole $\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell}}$ a la même signification que dans la remarque 3.11.

Nous pourrions naturellement, calculer encore d'autres coefficients A_{ij} pour des potentiels de couches d'ordre supérieur à 3. Cela entraînerait des complications supplémentaires de calcul sans gain sensiblement appréciable dans les résultats numériques.

Toutefois, il n'est pas à priori évident que les complications de calcul entraînées par l'emploi de potentiels de couches d'ordre élevé ne sont pas compensées par un gain dans la précision des résultats. En effet, plus l'ordre de la couche est élevée plus l'importance des termes diagonaux est grande, c'est-à-dire que la précision du calcul du déterminant doit aller en augmentant. Mais un deuxième phénomène vient contrarier ce raisonnement, comme il a été montré dans la remarque 3.13, plus le noyau de l'opérateur intégrale est singulier meilleures doivent-être les approximations des termes non singuliers voisins de la diagonale ; il s'ensuit une complexité accrue des programmes, une augmentation notable du temps de calcul et somme toute les gains en précision sont très peu sensibles. Il semble donc, que l'emploi de potentiels d'ordre élevé ne présente pas pratiquement tout l'intêret qui théoriquement doit être le leur. Toutefois, nous verrons sur un exemple numérique de problème à conditions aux limites mêlées que l'usage de potentiels d'ordre élevé, compte tenu de leurs défauts, peut être intéressant pour l'élaboration de programmes de recherche systématique de valeurs propres.

°°°

Conclusions.

Avec les 16 coefficients A_{ij} donnés dans ce chapitre, nous pouvons envisager tous les types de conditions aux limites : bord encastré, appuyé, libre, semi-encastré, semi-appuyé, semi-encastré semi-libre et toutes les combinaisons linéaires possibles entre ces différentes conditions.

De plus, il faut remarquer que ces coefficients sont généraux : ils ne dépendent que de la distance (ρ) de deux points du bord de la plaque. Ils peuvent donc s'appliquer à n'importe quelle forme de contour et leur expression analytique ne met en jeu qu'un nombre réduit de grandeurs : ρ , $F_{1,2,3,4}(\lambda\rho)$, $\frac{\partial\rho}{\partial n_P}$, $\frac{\partial\rho}{\partial n_M}$, $\frac{\partial\rho}{\partial s_M}$; ainsi la programmation du problème est simple, claire, rapide et quasiment universelle quelle que soit la forme de la plaque et les conditions aux limites imposées.

°°°

CHAPITRE 4

Applications numériques - Valeurs propres des plaques à conditions aux limites naturelles et uniformes sur tout le contour - Valeurs propres des plaques à conditions aux limites mêlées sur le contour

Sommaire.

La connaissance des valeurs propres (ou des fréquences propres) des plaques ayant une grande importance dans les problèmes de vibrations, les applications numériques que nous proposons portent sur la recherche des valeurs propres en fonction des différents types de conditions aux limites envisagées.

Il nous faut donc chercher les λ (valeurs propres réduites) qui minimisent en module le déterminant principal du système linéaire (3.5), c'est-à-dire (3.8), obtenu par l'approximation du système d'équations intégrales (3.4) de départ. Les expressions analytiques générales des coefficients complexes $A_{ij,k\ell}^{1,2,\ldots,16}$ du déterminant ont été données dans le chapitre 3.

La première série d'exemples traités concerne la recherche des valeurs propres de plaques soumises à des conditions aux limites uniformes sur tout le contour (bord encastré, appuyé ou libre). Dans un premier temps, afin de tester la validité, la convergence et la rapidité des méthodes de calcul proposées, nous traitons le cas de la plaque circulaire sans qu'il soit tenu compte des symétries particulières et nous comparons les valeurs trouvées aux résultats classiques. Enfin, pour une plaque de forme quelconque à bord encastré [18], [19], nous comparons les résultats numériques aux valeurs données par l'expérience.

Le problème de la forme particulière de la plaque ayant été résolu, notre deuxième série d'exemples porte sur la recherche des valeurs propres de plaques soumises à des conditions aux limites mêlées [20]. Dans un premier temps, nous traitons le cas d'une plaque circulaire encastrée sur un arc $\frac{\Pi}{2}$, Π ou $\frac{3\Pi}{2}$ et appuyée sur le reste du contour. Certains auteurs ont obtenu, par une méthode de perturbations, la première valeur propre ; notre méthode retrouve ce résultat mais donne, sans plus de difficultés, les valeurs propres suivantes.

Un autre exemple de problème à conditions aux limites mêlées est exposé : il s'agit d'une plaque circulaire le bord est encastré sur $\frac{3\Pi}{4}$ ou Π et libre sur le reste du contour. Les résultats numériques sont comparés à ceux donnés par l'expérience.

Dans tous les exemples proposés l'accord, entre les résultats calculés par la méthode des équations intégrales et ceux obtenus soit par des méthodes exactes soit par l'expérience, est satisfaisant.

Nous n'avons pas, pour nos résultats numériques, recherché systématiquement la meilleure précision, mais un compromis entre une précision suffisante pour le physicien et un temps de calcul sur machine raisonnabl

°°°

4.1.- Valeurs propres des plaques à conditions aux limites naturelles uniformes sur tout le contour.

Dans ce cas, n'ayant que deux conditions aux limites différentes à satisfaire, nous n'avons besoin de choisir que deux potentiels de couches d'ordre différent donc de déterminer deux densités de couches $\mu(P)$ différentes seulement.

Le déterminant complexe (3.8) à minimiser en module se réduit à un tableau à 4 cases du type (3.10), (3.12).

Pour le choix de l'ordre des potentiels de couche nous adoptons la démarche la plus économique en prenant les couches d'ordre 0 à 1. Sur un seul exemple nous avons également examiné les résultats obtenus avec des couches d'ordre 2 et 3.

4.1.1.- Plaque circulaire, comparaison des valeurs propres données par la résolution des équations intégrales à celles données par les formules classiques.

Afin d'avoir des garanties sur la validité de nos méthodes nous traiterons successivement les cas de la plaque circulaire encastrée, appuyée et libre. Le calcul proposé par la méthode des équations intégrales ne tiendra aucun compte des symétries particulières de la plaque de façon à ce qu'elle ne perde pas sa valeur générale. Nous comparons les valeurs propres trouvées à celles obtenues par les formules classiques.

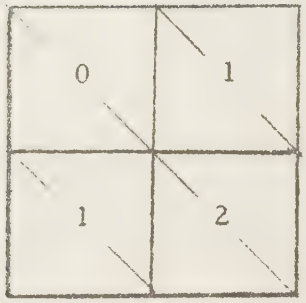
4.1.1.1.- Plaque circulaire à bord encastré.

Le déterminant à minimiser a la forme (3.10).

a) Résolution par des potentiels d'ordre 0 et 1.

Si nous prenons pour résoudre le problème des potentiels de couches d'ordre 0 et 1 ($q_1 = 0$, $q_2 = 1$) les expressions des coefficients du déterminant A_{ij}^{r+m} ($r = 1$, $m = 0, 1, 2, 3$) sont données dans le paragraphe 3.4.2.1. Le tableau (3.11), pour des potentiels d'ordre 0 et 1 devient :

(4.1)



Rappelons que pour les coefficients $A_{ij}^{1,2,3,4}$ nous avons proposé au chapitre 3 trois méthodes d'estimation différentes :

Méthode A (pas d'intégration, point de contrôle décentré) ⟶ $\overline{A}_{ij}^{1,2,3,4}$ formules (3.32)

Méthode B (termes diagonaux obtenus par intégration) ⟶
- $A_{ii}^{1,2,3,4}$ formules (3.33)
- $A_{ij}^{1,2,3,4}$ formules (3.34)

Méthode C (tous les termes sont calculés par intégration) ⟶
- $A_{ii}^{1,2,3,4}$ formules (3.33)
- $\overline{A}_{ij}^{1,2,3,4}$ formules (3.35)

$i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Nous allons calculer pour ces trois méthodes les valeurs du paramètre λ minimisant le déterminant (3.10) soient λ_A , λ_B et λ_C ces valeurs.

Auparavant, il convient de donner la façon de procéder pour le découpage du contour et la valeur des grandeurs intervenant dans les formules (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35), ces résultats sont donnés dans les paragraphes 1 de l'annexe 5.

Les valeurs des λ_A, λ_B et λ_C , pour un découpage du contour n = 35 points, sont données dans le tableau (T.4.1) avec les erreurs relatives par rapport aux valeurs exactes classiques λ_V contenues dans la première colonne du tableau. Toutefois, pour la méthode A les valeurs λ_A sont aussi indiquées pour n = 15 et n = 25 afin d'apprécier la vitesse de convergence du procédé. Naturellement pour un découpage en n morceaux du contour Γ l'ordre du déterminant à minimiser est 2n.

b) Résolution par des potentiels d'ordre 2 et 3.

A priori, il n'y a aucune raison de choisir, pour résoudre un problème de valeurs propres, les potentiels de couches d'ordre le moins élevé (0, 1). C'est pourquoi nous avons effectué le calcul des valeurs propres λ_D avec des potentiels de couches d'ordre plus élevé 2 et 3 soit : $q_1 = 2$, $q_2 = 3$.

Le déterminant à minimiser a toujours la forme (3.10). Les expressions analytiques des coefficients A_{ij}^{r+m} $(r = 9 , m = 0, 1, 2, 3)$ sont données :

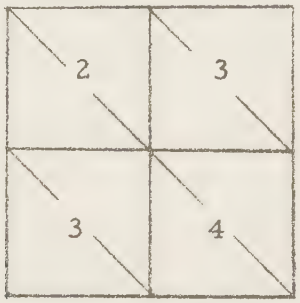
pour $i = j$ formules (3.44)

pour $i \neq j$ formules (3.45)

$i = 1, 2, \ldots , n , j = 1, 2, \ldots, n.$

Le tableau (3.11) pour des potentiels d'ordre 2 et 3 devient :

(4.2)



Les valeurs des grandeurs intervenant dans les formules (3.44) (3.45) sont données dans le paragraphe 2 de l'annexe 5.

Les résultats du calcul pour n = 35 des λ_D sont consignés dans le tableau (T.4.1) ainsi que l'erreur relative par rapport à λ_V.

Commentaires sur le tableau T.4.1.

1°) $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ potentiel d'ordre 0 et 1.

Des trois méthodes A, B, C, la méthode C est évidemment la meilleure, l'erreur est presque constante et n'excède pas 0,4%.

La méthode B se différencie de A par le calcul des termes diagonaux (importants pour un déterminant) l'erreur n'excède pas 0,8% en étant toutefois légèrement croissante avec les valeurs de λ.

$q_1 = 0$, $q_2 = 1$

$q_1 = 2$
$q_2 = 3$

	n = 15		n = 25		n = 35		n = 35		n = 35		n = 35	
λ_V	λ_A	$\epsilon_A\%$	λ_A	$\epsilon_A\%$	λ_A	$\epsilon_A\%$	λ_B	$\epsilon_B\%$	λ_C	$\epsilon_C\%$	λ_D	$\epsilon_D\%$
3, 1962	3, 285	2, 7	3, 246	1, 5	3, 230	1, 0	3, 2175	0, 65	3, 2080	0, 37	3, 2170	0, 64
4, 6109	4, 755	3, 1	4, 687	1, 6	4, 662	1, 1	4, 6425	0, 67	4, 626	0, 35	4, 641	0, 65
5, 9056	6, 123	3, 6	6, 010	1, 7	5, 975	1, 2	5, 9475	0, 71	5, 926	0, 35	5, 946	0, 68
6, 3064	6, 523	3, 4	6, 416	1, 7	6, 379	1, 2	6, 3525	0, 73	6, 328	0, 35	6, 351	0, 70
7, 1435	7, 466	4, 5	7, 282	1, 9	7, 232	1, 2	7, 1970	0, 75	7, 166	0, 35	7, 196	0, 74
7, 7992	8, 113	4, 0	7, 946	1, 9	7, 894	1, 2	7, 8575	0, 75	7, 826	0, 38	7, 857	0, 74
8, 3466	8, 839	5, 9	8, 526	2, 1	8, 456	1, 3	8, 4100	0, 76	8, 372	0, 35	8, 409	0, 76
9, 1968	9, 656	5, 0	9, 387	2, 1	9, 316	1, 3	9, 2700	0, 77	9, 228	0, 35	9, 268	0, 76

T.4.1.

La méthode A est la plus simple à mettre en oeuvre, la convergence est rapide (n = 15, 25, 35) et l'erreur n'excède pas 1, 4%.

Dans les méthodes B et C le contour équivalent choisi est le polygone régulier de n côtes incrit dans le cercle : nous traitons donc une plaque légèrement plus petite que la plaque réelle, les $\lambda_{B,C}$ devant être légèrement supérieurs par hypothèse (la plaque étant plus petite vibre plus "aigue"). Les erreurs trouvées ($\epsilon_{B,C}$) étant par excès vont bien dans ce sens.

Au point de vue temps de calcul machine (pour un même n), si nous prenons pour référence le temps de calculs de la méthode B :

$A = 0,8 \times B$

$C = 1,5 \times B$

Il s'avère que la méthode B, compte tenu d'une erreur acceptable, se révèle la plus intéressante et c'est celle qui est utilisée par la suite.

2°) $q_1 = 2$, $q_2 = 3$ potentiel d'ordre 2 et 3.

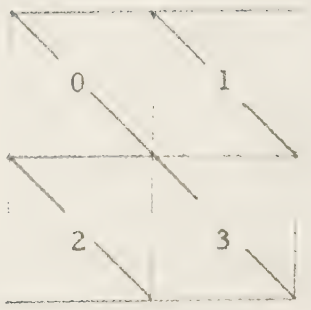
L'erreur sur les λ_D est du même ordre de grandeur que sur les λ_B, et, dans ce sens, choisir des potentiels d'ordre supérieur ne conduit pas à améliorer sensiblement le résultat ; de plus le temps de calcul est 1, 4 x B.

Pour cette dernière raison il semble qu'il n'y ait aucun intérêt à compliquer les problèmes à conditions aux limites uniformes sur tout le contour en introduisant des potentiels d'ordre supérieur à 1. Cependant, pour certains problèmes particuliers (problèmes à conditions aux limites mêlées par exemple) il n'est pas exclus de s'en servir pour avoir, par exemple, des minimums plus nets de la valeur du module du déterminant, tout en acceptant un temps de calcul supérieur, mais il n'y a là aucune obligation.

4.1.1.2.- Plaque circulaire à bord appuyé.

Le déterminant à minimiser a la forme (3.15). Nous résolvons le problème avec des potentiels de couches d'ordre 0 et 1 ($q_1 = 0$, $q_2 = 1$) les expressions des coefficients A_{ij}^r , A_{ij}^{r+1} (r = 1) , A_{ij}^u , A_{ij}^{u+1} u = 5 sont données dans le paragraphe 3.4.2.1. Le tableau (3.16) pour des potentiels d'ordre 0 et 1 devient :

(4.3)



avec :

A^1_{ij} { Si i = j formule (3.33.1) ; Si i ≠ j formule (3.34.1)

A^2_{ij} { Si i = j formule (3.33.2) ; Si i ≠ j formule (3.34.2)

A^5_{ij} { Si i = j formule (3.36.1) ; Si i ≠ j formule (3.38.1)

A^6_{ij} { Si i = j formule (3.36.2) ; Si i ≠ j formule (3.38.2)

Les différentes grandeurs intervenant dans les formules ci-dessus sont données dans le paragraphe 3 de l'annexe 5.

Nous avons fait le calcul des six premières valeurs propres avec un coefficient de Poisson $\nu = 0,33$ pour un découpage du contour $n = 32$.

Les valeurs des λ calculés minimisant le déterminant (3.15) sont données dans le tableau T.4.2 ainsi que l'erreur relative par rapport aux λ_V calculés à partir des formules classiques :

λ_V	λ	ϵ %
2, 232	2, 245	0, 6
3, 736	3, 760	0, 6
5, 059	5, 092	0, 7
5, 452	5, 490	0, 75
6, 312	6, 360	0, 8
6, 942	7, 005	0, 85

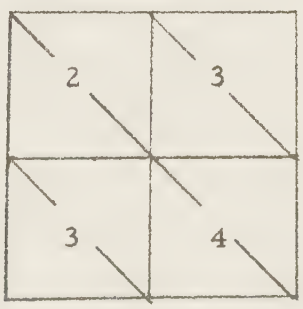
T.4.2

L'erreur relative est déjà inférieure à 1% pour un nombre de points de découpage pas très grand. Le temps de calcul par rapport à celui de la méthode B pour la plaque encastrée est 1, 2 x B.

4.1.1.3.- Plaque à bord libre.

Le déterminant à minimiser a la forme (3.12). Nous résolvons le problème avec des potentiels de couches d'ordre 0 et 1 ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$). Les expressions des coefficients A_{ij}^{u+m} ($u = 5$, $m = 0, 1, 2, 3$) sont données dans le paragraphe 3.4.2.1. Le tableau (3.13) pour des potentiels d'ordre 0 et 1 devient :

(4.4)



Le calcul analytique du coefficient A^8_{ii} ayant présenté une certaine ambiguïté (voir remarque 3.10 et surtout l'annexe 3) il en a été donné trois expressions : (3.37.1), (3.37.2), (3.37.3).

Nous ferons le calcul des valeurs propres $\lambda_{a,b,c}$ avec chacune de ces expressions, les formules correspondantes à employer sont :

$$\lambda_a \begin{cases} A^5_{ij} \begin{cases} i = j & (3.36.1) \\ i \neq j & (3.38.1) \end{cases} \\ A^6_{ij} \begin{cases} i = j & (3.36.2) \\ i \neq j & (3.38.2) \end{cases} \\ A^7_{ij} \begin{cases} i = j & (3.36.3) \\ i \neq j & (3.38.3) \end{cases} \\ A^8_{ij} \begin{cases} i = j & (3.37.1) \\ i \neq j & (3.40) \end{cases} \end{cases}$$

Pour λ_b les formules donnant les coefficients $A^{5,5,7,8}_{ij}$ sont les mêmes que précédemment sauf que la formule (3.37.1) est remplacée par (3.37.2). De même pour les λ_c, (3.37.1) est remplacée par (3.37.3).

Les λ_V sont les valeurs calculées à partir des formules exactes.

Nous avons fait le calcul des quatre premières valeurs propres $\lambda_{a,b,c}$ ainsi que des erreurs relatives avec un coefficient de Poisson $\nu = 0,33$ pour un découpage $n = 32$. Les coefficients intervenant dans les formules sont donnés au paragraphe 4 de l'annexe 5.

Les résultats des $\lambda_{a,b,c}$ sont donnés dans le tableau T.4.3 ainsi que les erreurs relatives.

λ_V	λ_a	ϵ_a%	λ_b	ϵ_b%	λ_c	ϵ_c%
2, 286	2, 385	+ 4, 4	2, 230	- 2, 5	2, 305	+ 0, 8
3, 015	3, 075	+ 2	2, 991	- 0, 8	3, 020	+ 0, 3
3, 489	3, 55	+ 1, 7	3, 465	- 0, 8	3, 505	+ 0, 4
4, 530	4, 610	+ 1, 7	4, 515	- 0, 4	4, 555	+ 0, 45

T.4.3

Commentaires sur le tableau T.4.3.

Le calcul des $\lambda_{a,b,c}$ diffère uniquement sur l'estimation du terme diagonal A^8_{ii} (formules (3.37.1), (3.37.2) ou (3.37.3)), les autres coefficients du déterminant étant les mêmes.

Nous constatons tout d'abord que l'erreur pour les faibles valeurs de λ est la plus grande dans tous les cas :

$$A^8_{ii} \sim \frac{a}{(\frac{\lambda\epsilon_i}{2})^2}$$

c'est-à-dire inversement proportionnel à λ^2. Pour les λ_a l'erreur est par excés, par défaut sur les λ_b ; enfin en prenant pour le coefficient A^8_{ii} (3.37.3) une valeur moyenne entre les deux précédentes l'erreur est ramenée à un niveau acceptable du même ordre de grandeur que pour la plaque encastrée ou appuyée précédemment calculée.

Le temps de calcul en machine est 1, 6 fois celui de la plaque encastrée par la méthode B.

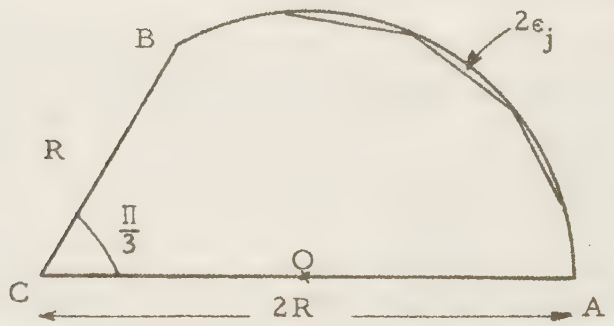
Conclusions sur le calcul des valeurs propres de la plaque circulaire.

Pour le calcul des valeurs propres de la plaque encastrée, les diverses méthodes proposées (A, B, C) nous ont permis de faire un choix raisonnable sur le type d'approximation des coefficients $A^{1,2,\ldots,16}_{ij}$ à adopter. De plus, sur ce même exemple, nous avons vu qu'il était préférable de choisir des potentiels de

couches d'ordre peu élevé (0 et 1) plutôt que d'ordre plus élevé (2 et 3) : l'erreur étant sensiblement du même ordre de grandeur mais le temps de calcul et la mise en oeuvre plus rapides.

Le cas de la plaque appuyée ne pose pas de problème. Le cas de la plaque libre présente quelques difficultés d'interprétation des résultats quant au choix de l'approximation du terme diagonal A_{ii}^{8}. Toutefois, un compromis est possible et les résultats sont comparables, en précision avec ceux des deux exemples précédents.

4.1.2.- Plaque encastrée de forme quelconque, comparaison des valeurs propres données par la résolution des équation intégrales et celles données par l'expérience.



La plaque étudiée a une forme ne présentant aucune symétrie : deux côtés rectilignes faisant un angle de $\Pi/3$ raccordés par un arc de cercle.

Le déterminant à minimiser a la forme (3.10).

On se propose de résoudre le problème par des potentiels d'ordre 0 et 1, et les coefficients $A_{ij}^{1,2,3,4}$ sont évalués comme pour la méthode B de la plaque circulaire encastrée c'est-à-dire :

$\left\{ \begin{array}{ll} A_{ii}^{1,2,3,4} & \text{formules (3.33)} \\ A_{ij}^{1,2,3,4} & \text{formules (3.34)} \end{array} \right.$

L'arc de cercle AB est approché par une ligne polygonale régulière inscrite de n_1 côtés, (P est le nombre de côtés du polygone). La longueur de chaque côté est :

$$2\epsilon_j = 2R \sin \frac{\Pi}{P}$$

On découpe le côté BC en n_2 morceaux de longueur $\frac{R}{n_2}$, et n_2 est tel que :

$$\frac{R}{n_2} \# 2R \sin \frac{\Pi}{P}$$

Les côtés CO et AO sont également découpés en n_2 morceaux. Le calcul numérique a été fait pour $n_1 = 12$, $n_2 = 6$ c'est-à-dire $n = n_1 + 3n_2 = 30$ points de découpage du contour.

Les valeurs des ρ_{ij}, Θ_j, Θ_i, φ_j, φ_i sont données dans l'annexe 6.

Les différents λ_m sont donnés dans le tableau T.4.5 à la deuxième colonne, la première contenant les valeurs de l'indice m. Les fréquences f_m sont déduites à partir des constantes mécaniques de la plaque, par :

$$(4.5) \qquad f_m = \frac{1}{2\Pi} \frac{\lambda_m^2}{R^2} \sqrt{\frac{Eh^3}{12m(1 - \nu^2)}}$$

L'étude expérimentale est faite sur une plaque en acier inoxydable du commerce dont les caractéristiques sont les suivantes :

$R = 10\text{cm}$, $h = 0,057\text{cm}$, $E = 1,92 \times 10^{12}$ c.g.s., $\nu = 0,33$, $m = 0,444\ \text{g/cm}^2$,

le serrage des boulons d'encastrement est fait à 3,5 Kg. Les détails du montage sont donnés sur les photos (P.4.1) et (P.4.2) avec les commentaires suivants :

P.4.1. : Vue d'ensemble du montage.

1 - Générateur de fréquence et amplificateur,

2 - Excitateur électrodynamique,

3 - Compteur de fréquences,

4 - Bloc de béton supportant les flasques d'encastrement de la plaque et la plaque elle-même.

P.4.2. : Vue de détail de la plaque et des flasques d'encastrement.

1 - Bloc de béton portant une couronne de goujons sur lesquels sont 2, 3 et 4.

2 - 4 - Flasques en acier de 15 mm d'épaisseur dans lesquelles est découpée une fenêtre représentant la forme de la plaque.

3 - Plaque en acier inoxydable.

Les différents modes propres sont mis en évidence de façon classique avec du sable de Fontainebleau, voir tableau T.4.4. Les valeurs des fréquences propres sont consignées dans le tableau T.4.5.

Commentaires sur sur les expériences.

Il est très difficile de rendre nulle la force d'un excitateur électrodynamique ; alors plutôt que d'exciter la plaque elle-même, il est préférable d'exciter le bâti qui la supporte. De cette manière la plaque n'est soumise à aucune précontrainte pouvant modifier ses fréquences propres dans des proportions importantes (10 à 15% pour les premiers modes).

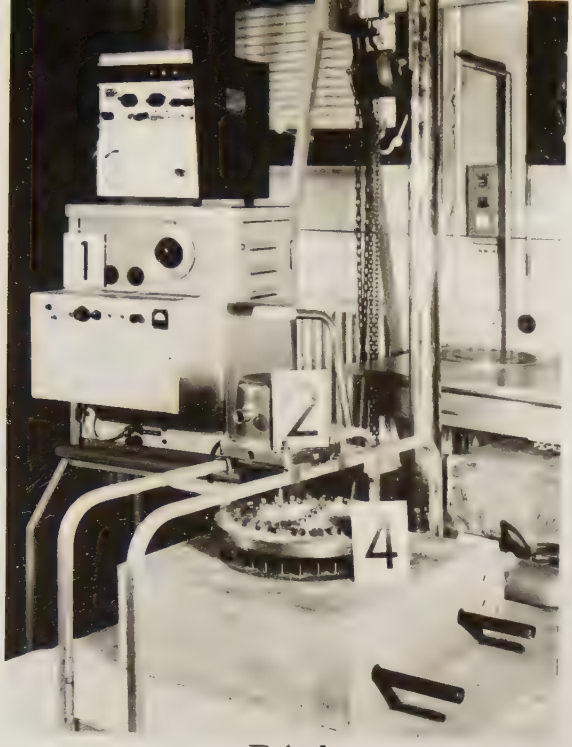
	calcul				expérience					
m	λ_m	f_m Hz	f_m/f_1	f_m/f_2	f_m Hz	ε %	f_m/f_1	ε %	f_m/f_2	ε %
0	5, 42	408								
1	6, 74	631	1	0, 701	601	4, 74	1		0, 693	1, 15
2	8, 04	898	1, 42	1	867	3, 5	1, 44	1, 42	1	
3	8, 64	1038	1, 64	1, 158	981	5, 5	1, 635	0, 3	1, 132	1, 4
4	9, 28	1200	1, 89	1, 33	1160	3, 3	1, 93	2, 12	1, 34	0, 75
5	10, 14	1430	2, 26	1, 59	1394	2, 5	2, 32	2, 56	1, 61	1, 2
6	10, 50	1532	2, 42	1, 7	1492	2, 6	2, 48	2, 5	1, 725	1, 45
7	11, 74	1910	3, 05	2, 135	1798	5, 9	2, 99	2	2, 07	2, 5

T. 4.5

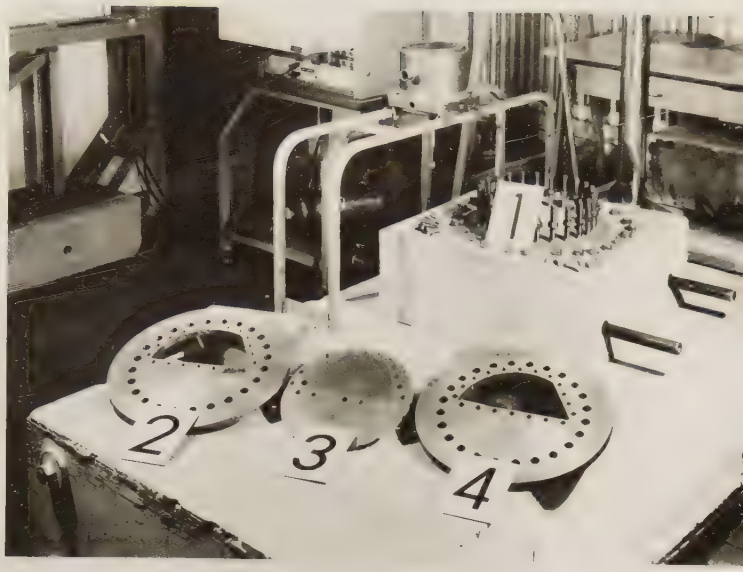
Commentaires sur le tableau (T.4.5)

Les fréquences expérimentales sont toujours plus basses que celles calculées et il y a une certaine dispersion de l'erreur, cela peut tenir à plusieurs causes :

- La plaque n'est pas bien encastrée sur le bord, c'est-à-dire u est bien nul sur le bord, mais il n'est pas sûr que $\partial_n u$ le soit partout.

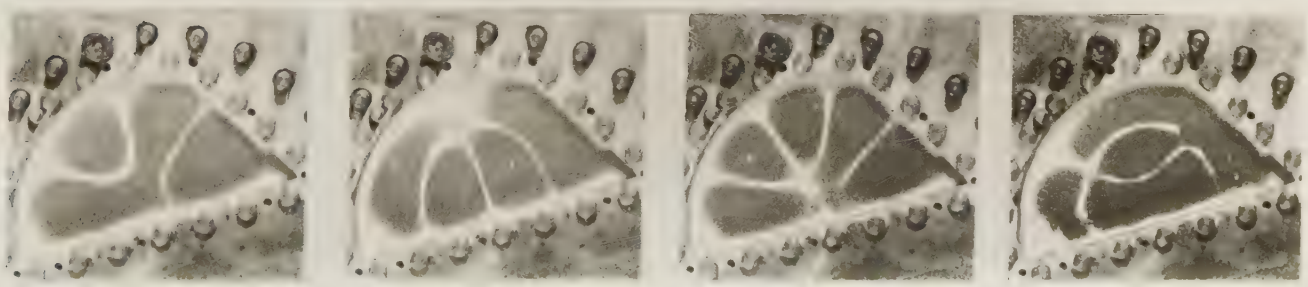


P4.1



P4.2

m = 0 m = 1 m = 2 m = 3



m = 4 m = 5 m = 6 m = 7

- La plaque employée pour l'expérience est une tôle du commerce, obtenue par laminage : l'isotropie n'est pas parfaite.

- La valeur des constantes mécaniques E et ν est toujours déterminée avec une certaine erreur. Pour s'affranchir des constantes mécaniques, il est intéressant de comparer les rapports des fréquences expérimentales et les mêmes rapports des fréquences calculées. Les résultats sont donnés dans le tableau T.4.5 pour f_m/f_1 et f_m/f_2 ainsi que les erreurs relatives qui sont sensiblement inférieures aux erreurs en fréquences.

Remarque 4.1.

Nous ne donnons pas la valeur de la première fréquence propre expérimentale (m = 0), car il est difficile de prévoir un dispositif de mesure d'amplitude maximum lorsque la plaque est encastrée sur tout le bord.

Remarque 4.2.

Les conditions aux limites d'une plaque encastrée sont $u = 0$, $\partial_n u = 0$. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, $u = 0$ est facile à réaliser physiquement mais il n'en est pas de même pour la seconde condition. A cet égard il serait intéressant d'entreprendre une étude systématique de l'encastrement physique :

$$u = 0$$
$$\partial_n u + a(\lambda) D \{\Delta u - (1 - \nu)\partial_s^2 u\} = 0$$

$a(\lambda)$ fonction inconnue à déterminer à partir des résultats expérimentaux et des valeurs calculées.

Conclusions.

La comparaison des valeurs calculées à celles obtenues par l'expérience est satisfaisante. A partir des méthodes que nous venons d'exposer, il semble qu'il n'y ait pas de difficulté à étendre ce genre de procédés aux plaques appuyées ou libres quelle que soit la forme de leur contour.

° ° °

4.2.- Valeurs propres des plaques à conditions aux limites mêlées sur le contour.

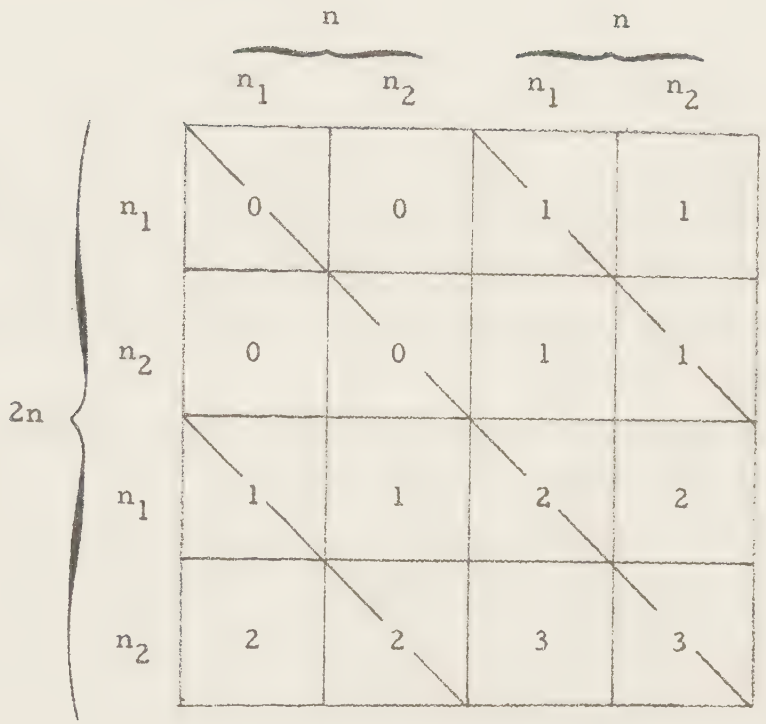
Le problème des plaques de forme quelconque à conditions aux limites uniformes sur tout le contour ayant été résolu, il nous reste à traiter le cas où ces conditions sont différentes sur différentes portions du contour : c'est ce genre de problème que nous appellerons problème à conditions aux limites mêlé Il n'existe pas, quelle que soit la forme de la plaque, de méthode de résolution formelle de ce genre de problème. C'est pour cette raison que nous prendrons dans nos exemples de calculs une plaque circulaire pour ne pas avoir la double difficulté de la forme et des conditions aux limites : cela n'enlève rien à la généralité du problème à conditions aux limites mêlées.

4.2.1.- Plaque circulaire encastrée sur un arc $\Pi/2$, Π ou $3\Pi/2$ et appuyée sur le reste du contour, comparaison des valeur propres données par la résolution des équations intégrales à celles proposées par certains auteurs.

Le problème de la recherche des valeurs propres d'une plaque encastrée sur Γ_1 et appuyée sur Γ_2 revient à minimiser le module du déterminant complexe de la forme (3.17).

Toutefois, il se pose le problème du choix des ordres de potentiels de couches pour résoudre le problème. On sait, d'après la remarque 3.6, qu'il n'est pas nécessaire de prendre $q_1 \neq q_3$ et $q_2 \neq q_4$ mais qu'il est suffisant que $\mu_{q_1} \neq \mu_{q_3}$ et $\mu_{q_2} \neq \mu_{q_4}$.

Si nous choisissons de prendre $q_1 = q_3 = 0$ et $q_2 = q_4 = 1$, le schéma (3.18) devient :



Γ est découpé en n éléments, Γ_1 en n_1 , Γ_2 en n_2 , on a : $n = n_1 + n_2$.

Si $q_1 = q_3 = 0$ et $q_2 = q_4 = 1$ les expressions des coefficients du déterminant (3.17) sont données par les formules :

$$A_{ij}^{r+0,1,2,3} = A_{ij}^{1,2,3,4} \quad (r=1)$$

- si i = j formules (3.33.1, 2, 3, 4)
- si i ≠ j formules (3.34.1, 2, 3, 4)

$$A_{ik}^{s+0,1,2,3} = A_{ik}^{1,2,3,4} \quad (s=1)$$

- ∀ i et k formules (3.34.1, 2, 3, 4)

$$A_{\ell j}^{r+0,1} = A_{\ell j}^{1,2}$$

- ∀ℓ et j formules (3.34.1, 2)

$$A_{\ell k}^{s+0,1} = A_{\ell k}^{1,2}$$

- si ℓ = k formules (3.33.1, 2)
- si ℓ ≠ k formules (3.34.1, 2)

$$A_{\ell j}^{t+0,1} = A_{\ell j}^{5,6} \quad (t=5)$$

- ∀ℓ et j formules (3.38.1, 2)

$$A_{\ell k}^{u+0,1} = A_{\ell k}^{5,6} \quad u=5$$

$$\begin{cases} \text{si } \ell = k \text{ formules (3.36.1, 2)} \\ \text{si } \ell \neq k \text{ formules (3.38.1, 2)} \end{cases}$$

avec :

$i = 1, 2, \ldots, n_1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n_1$

$\ell = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n \; ; k = n_1 + 1, \; n_2 + 2, \ldots, n$

Dans le cas d'une plaque circulaire les diverses grandeurs intervenant dans les formules ci-dessus ont été données dans l'annexe 5.

Pour une plaque circulaire n est le nombre de côtés du polygone régulier inscrit dans le cercle.

Nous traitons le cas où la plaque circulaire est encastrée sur un arc α et appuyée sur $2\Pi - \alpha$, dans les cas suivants :

$\alpha = 0$	$n_1 = 0$	$n_2 = n$	entièrement appuyée
$\alpha = \frac{\Pi}{2}$	$n_1 = \frac{n}{4}$	$n_2 = \frac{3n}{4}$	
$\alpha = \Pi$	$n_1 = \frac{n}{2}$	$n_2 = \frac{n}{2}$	
$\alpha = \frac{3\Pi}{2}$	$n_1 = \frac{3n}{4}$	$n_2 = \frac{n}{4}$	
$\alpha = 2\Pi$	$n_1 = n$	$n_2 = 0$	entièrement encastrée

Le calcul numérique a été fait pour n = 32, avec un coefficient de Poisson $\nu = 0,33$. Les 4 premières valeurs propres λ sont indiquées dans le tableau T.4.6 en fonction de α ; dans le cas où $\alpha = 0$ (plaque appuyée) et $\alpha = 2\Pi$ (plaque encastrée) les λ sont les λ_V des tableaux T.4.2 et T.4.1.

λ \ α	0	$\Pi/2$	Π	$3\Pi/2$	2Π
	2,23	2,55	2,75	3,02	3,19
	3,73	4,02	4,20	4,42	4,61
	5,06	5,3	5,51	5,76	5,90
	5,45	5,72	5,90	6,18	6,30

T.4.6

Commentaires sur le tableau 4.6.

Les λ calculés se répartissent régulièrement, en fonction de α, entre les valeurs propres correspondant au cas où la plaque est totalement appuyée

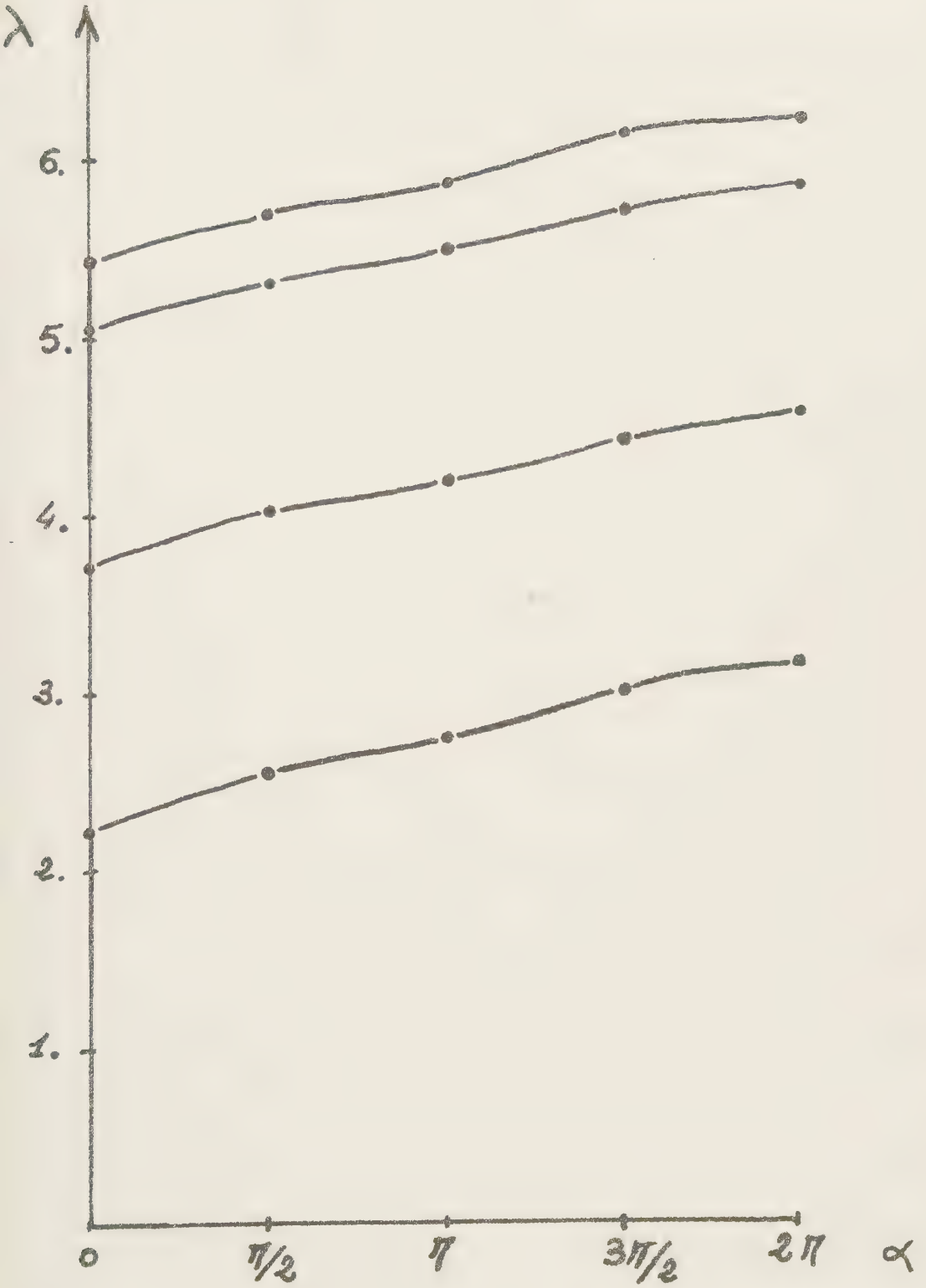
($\alpha = 0$) et totalement encastrée ($\alpha = 2\Pi$) : cette répartition est indiquée sur le graphe C.4.1. Ce résultat était prévisible, en effet il est connu que les résonances des plaques appuyées et encastrées ont les mêmes formes de lignes nodales. Donc encastrer plus ou moins une plaque à bord appuyé correspond uniquement à une augmentation des valeurs propres de la plaque appuyée sans modification des lignes nodales. Toutefois, les applications de ce problème à conditions aux limites mêlées peuvent être intéressantes, en se rappelant la remarque 4.2 ; c'est le cas notamment d'une plaque soudée par points ou boulonnée sur un chassis rigide considérée comme totalement encastrée, ce qui n'est pas le cas.

Rappelons que de nombreux auteurs se sont intéressés au problème de la plaque circulaire encastrée sur une partie du bord et appuyée sur l'autre. W.Nowacki et Z.Olesiak [21], [22] ont proposé une méthode de résolution basée sur la superposition sur le bord encastré de moments, malheureusement les valeurs numériques trouvées des λ sont déjà supérieures à celles de la plaque totalement encastrée. Bartlett [23] résout le problème avec une méthode de perturbation et donne, avec une bonne précision, la première valeur propre. La méthode exposée ici confirme les résultats de Bartlett et permet d'aller au-delà sans plus de difficultés en donnant les valeurs propres suivantes comme il est indiqué dans nos résultats.

4.2.2.- Plaque circulaire encastrée sur un arc $3\Pi/4$ ou Π et libre sur le reste du contour : comparaison des valeurs propres données par la résolution des équations intégrales à celles de l'expérience.

Le problème de la plaque encastrée sur une portion du contour et à bord libre sur le reste est de loin le plus intéressant des problèmes à conditions aux limites mêlées. En effet, pratiquement ce cas se rencontre souvent dans la construction : c'est le cas notamment d'une aile d'avion, d'une ailette de turbine encastrée sur un moyeu rigide et de toutes les plaques montées avec un certain porte à faux.

Le problème de la recherche des valeurs propres d'une plaque encastré sur Γ_1 et libre sur Γ_2 revient à minimiser le module du déterminant complexe de la forme (3.8).

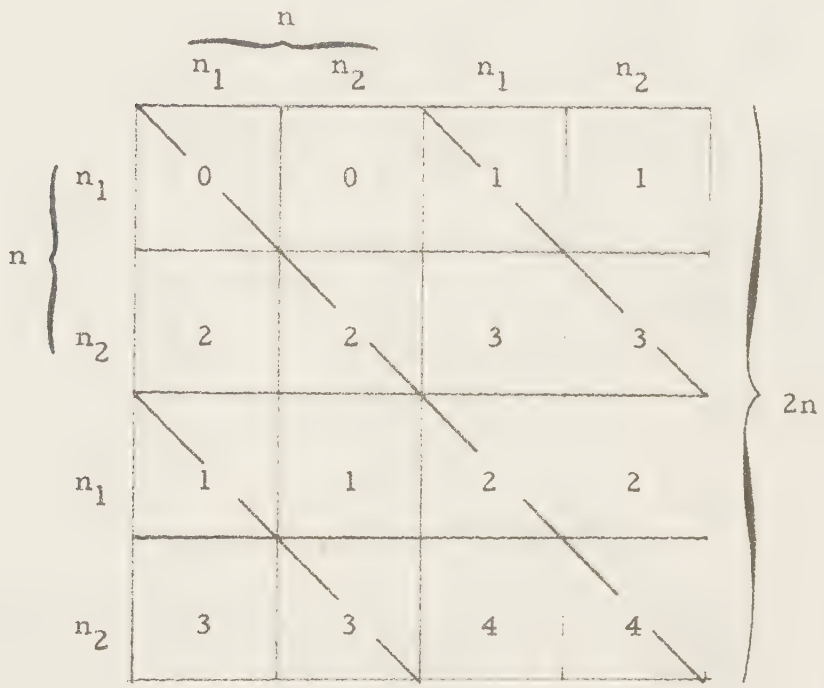


Valeurs propres λ d'une plaque circulaire encastrée sur un arc α et appuyée sur 2π-α

C 4.1

a) Comme pour l'exemple précédent nous pouvons prendre $q_1 = q_3 = 0$ et $q_2 = q_4 = 1$ à condition que $\mu_{q_1} \neq \mu_{q_3}$ et $\mu_{q_2} \neq \mu_{q_4}$, le schéma (3.9) devient :

(4.6)



Γ est découpé en n éléments, Γ_1 en n_1, Γ_2 en n_2 avec $n = n_1 + n_2$.

Si $q_1 = q_3 = 0$ et $q_2 = q_4 = 1$ les expressions des coefficients du déterminant (3.8) sont données par les formules :

(4.7)

$$\begin{cases} A_{ij}^{r+m} = A_{ij}^{1,2,3,4} \quad r = 1 & \begin{cases} \text{si } i = j \text{ formules } (3.33.1, 2, 3, 4) \\ \text{si } i \neq j \text{ formules } (3.34.1, 2, 3, 4) \end{cases} \\ A_{ik}^{s+m} = A_{ik}^{1,2,3,4} \quad s = 1 & \{ \forall \ i \text{ et } k \text{ formules } (3.34.1, 2, 3, 4) \\ A_{\ell j}^{t+m} = A_{\ell j}^{5,6,7,8} \quad t = 5 & \{ \forall \ \ell \text{ et } j \text{ formules } (3.38.1, 2, 3), \ (3.40) \\ A_{\ell k}^{u+m} = A_{\ell k}^{5,6,7,8} \quad u = 5 & \begin{cases} \text{si } \ell = k \text{ formules } (3.36.1, 2, 3), \ (3.37.3) \\ \text{si } \ell \neq k \text{ formules } (3.38.1, 2, 3), \ (3.40) \end{cases} \end{cases}$$

avec $m = 0, 1, 2, 3$.

$i = 1, 2, \ldots, n_1$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$

$\ell = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$, $k = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$

Remarque 4.3.

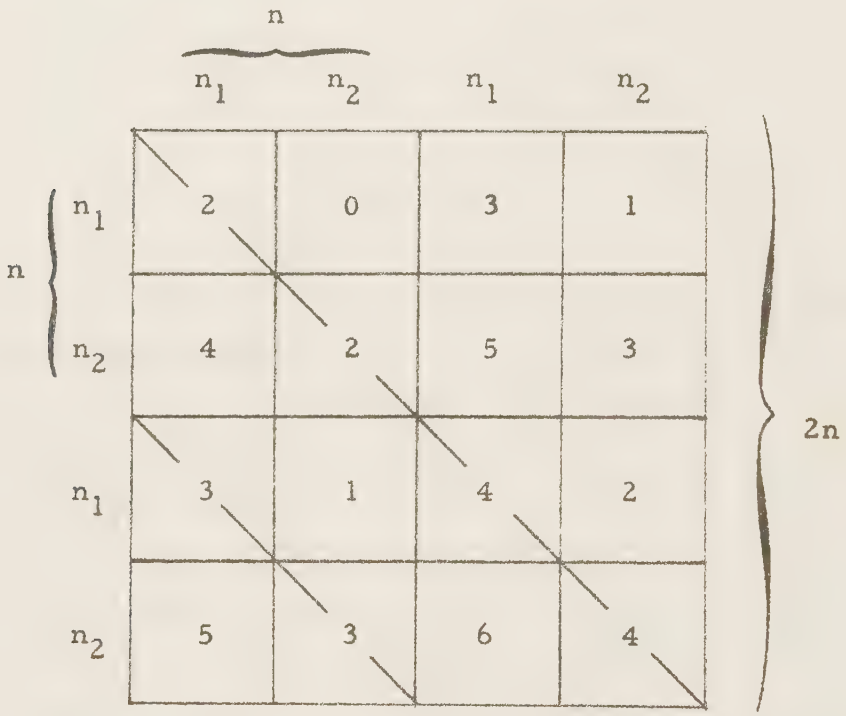
Nous employons la formule (3.37.3) pour le calcul du terme diagonal $A^{8}_{\ell\ell}$ car elle donne l'erreur minimum, comme nous l'avons vu déjà dans le cas de la plaque à bord libre (voir commentaires sur le tableau T.4.3).

b) Au lieu de choisir $q_1 = q_3$ et $q_2 = q_4$ on peut prendre $q_1 \neq q_3$ et $q_2 \neq q_4$, par exemple :

$$q_1 = 2\ ,\ q_2 = 3\ ,\ q_3 = 0\ ,\ q_4 = 1,$$

le schéma (3.9) devient :

(4.8)



Γ est toujours découpé en n éléments, Γ_1 en n_1, Γ_2 en n_2 avec $n = n_1 + n_2$.

Si :

$$q_1 = 2\ ,\ q_2 = 3\ ,\ q_3 = 0\ ,\ q_4 = 1$$

les expressions des coefficients du déterminant (3.8) sont données par les formules :

$$
(4.9)\quad
\begin{cases}
A_{ij}^{r+m} = A_{ij}^{9,10,11,12} \quad r = 9 & \begin{cases} \text{si } i = j & \text{formules (3.44.1, 2, 3,4)} \\ \text{si } i \neq j & \text{formules (3.45.1, 2, 3, 4)} \end{cases} \\
A_{ik}^{s+m} = A_{ik}^{5,6,7,8} \quad s = 5 & \begin{cases} \forall\ i \text{ et } k & \text{formules (3.31.1, 2, 3, 4)} \end{cases} \\
A_{\ell j}^{t+m} = A_{\ell j}^{13,14,15,16} \quad t = 13 & \begin{cases} \forall\ \ell \text{ et } j & \text{formules (3.46.1, 2, 3, 4)} \end{cases} \\
A_{\ell k}^{u+m} = A_{\ell k}^{5,6,7,8} \quad u = 5 & \begin{cases} \text{si } \ell = k & \text{formules (3.36.1, 2, 3), (3.37.3)} \\ \text{si } \ell \neq k & \text{formules (3.38.1, 2, 3), (3.40)} \end{cases}
\end{cases}
$$

avec $m = 0, 1, 2, 3$.

$i = 1, 2, \ldots, n_1$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$

$\ell = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$, $k = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$.

Dans le cas d'une plaque circulaire les diverses grandeurs intervenant dans les formules ci-dessus ont déjà été données dans l'annexe 5.

Nous traitons ici les cas d'une plaque circulaire encastrée sur un arc α et libre sur $2\Pi - \alpha$. Si n est le nombre de côtés du polygone régulier inscrit dans le cercle :

$n_1 = \frac{n}{2\Pi}\alpha$ nombre de côtés du polygone sur le bord encastré.

$n_2 = \frac{n}{2\Pi}(2\Pi - \alpha)$ nombre de côtés du polygone sur le bord libre.

Les λ calculés par les équations intégrales sont comparés aux valeurs données par l'expérience.

Calculs numériques.

Pour un découpage du contour en n = 32 et pour $\alpha = \frac{3\Pi}{4}$ et $\alpha = \Pi$, le calcul des λ minimisant le module du déterminant (3.8) a été fait dans les deux cas suivants :

1°) En prenant $q_1 = q_3 = 0$ et $q_2 = q_4 = 1$, c'est-à-dire les formules (4.7) pour les coefficients du déterminant (3.8).

2°) En prenant $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 0$, $q_4 = 1$, c'est-à-dire les formules (4.9) pour le déterminant (3.8).

Sur les graphes C.4.2 ($\alpha = \frac{3\Pi}{4}$) et C.4.3 ($\alpha = \Pi$ on a tracé les courbes log |Déterminant| = $f(\lambda)$ pour les deux séries de coefficients envisagés (4.7) et (4.9). Nous constatons que :

- En première approximation, les minimums semblent mieux marqués avec les coefficients (4.9) qu'avec les coefficients (4.7). Cela peut s'expliquer en comparant les schémas (4.6) et (4.8), dans ce dernier la diagonale principale est mieux marquée par les termes prépondérants d'ordre 4 : les minimums sont plus accusés. D'autre part les diagonales de (4.8) sont comparables à celles de (4.2) (plaque encastrée, calcul par des potentiels d'ordre 2 et 3) et de (4.4) (plaque libre, calcul par des potentiels d'ordre 0 et 1).

- Toutefois, en dernière analyse, il ressort que les valeurs propres λ calculées avec (4.7) et (4.9) sont sensiblement les mêmes. Cela n'a rien d'étonnant, nous avons déjà vu ce phénomène à propos de la plaque encastrée (calcul par des potentiels d'ordre 0 et 1 et par des potentiels d'ordre 2 et 3).

- En outre, le temps de calcul en machine dans le cas où $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 0$, $q_4 = 1$ est près du double de celui relatif au calcul avec $q_1 = q_3 = 0$, $q_2 = q_4 = 1$.

Il ressort de cette étude la confirmation (voir commentaires sur le tableau T.4.1 - 2°)) que l'on n'a pas intérêt à choisir des couches d'ordre élevé pour une précision meilleure et qu'il vaut mieux s'en tenir à des potentiels d'ordre 0 et 1 pour diminuer le temps de calcul.

Les différents λ_m sont donnés dans le tableau (T.4.7) pour les valeurs de $\alpha = \frac{3\Pi}{4}$ et $\alpha = \Pi$. La première colonne de ce tableau contient les valeurs de l'indice m. Les fréquences f_m sont déduites des λ_m par la formule (4.5) faisant intervenir les constantes mécaniques de la plaque.

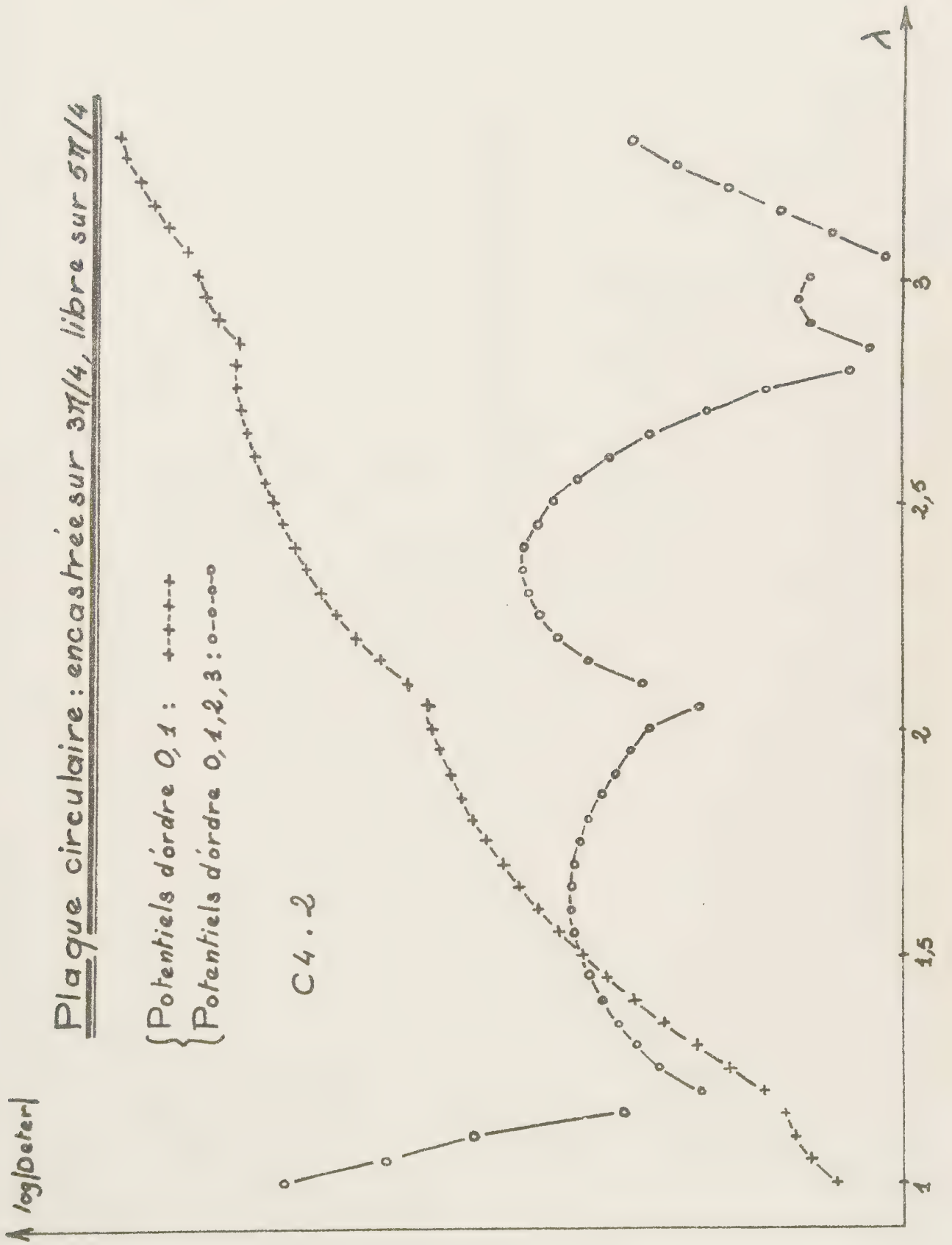
Etude expérimentale.

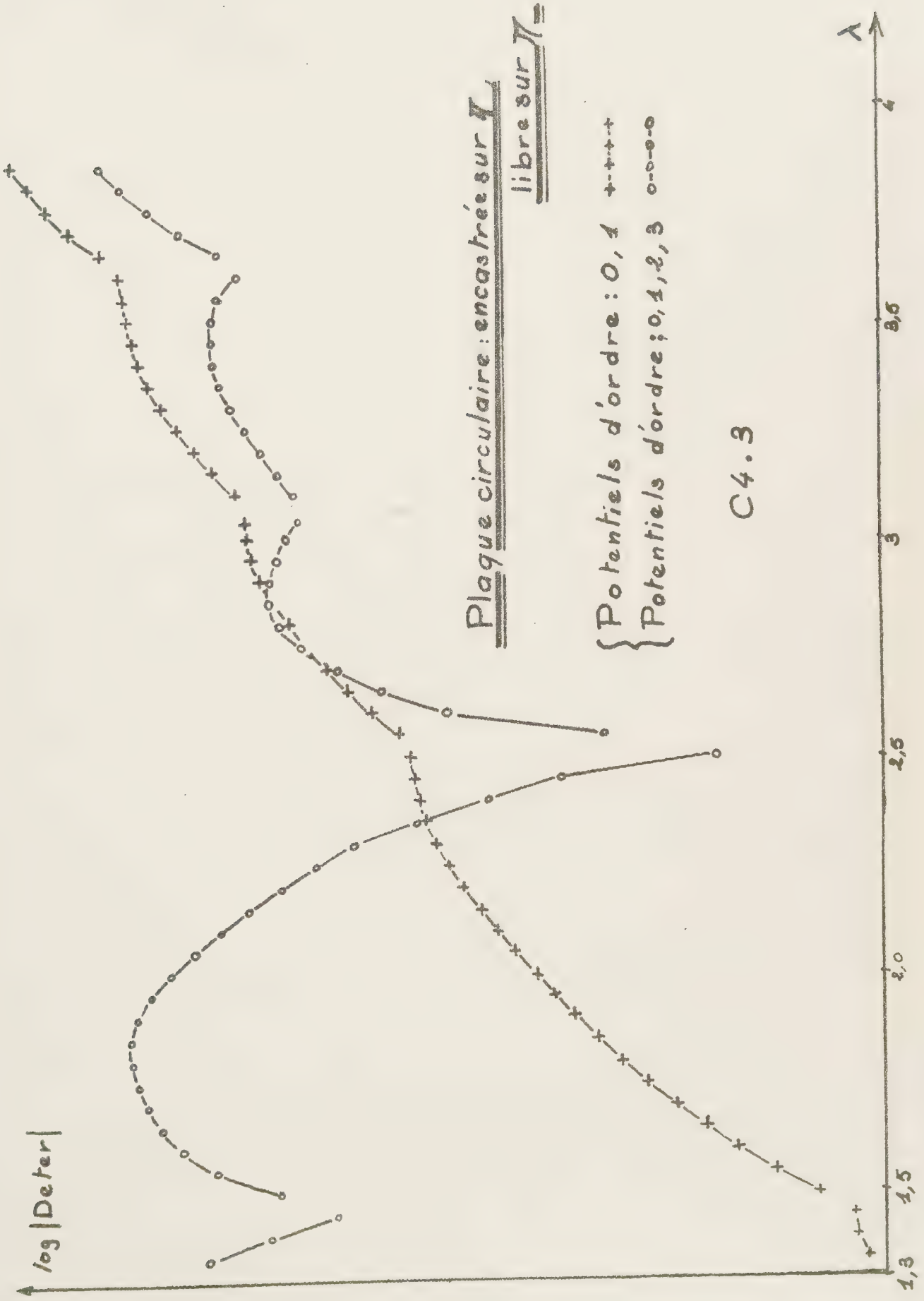
L'étude expérimentale est faite sur une plaque en acier inoxydable du commerce dont les caractéristiques sont les suivantes :

$R = 10$ cm, $h = 0,18$ cm, $E = 1,92 \times 10^{12}$ c.g.s.

$\nu = 0,33$, $m = 1,404$ g/cm^2,

le serrage des boulons d'encastrement est fait à 3,5 Kg. Les détails du montage sont donnés sur les photos (P.4.3), (P.44) et (P.4.5) avec les commentaires suivants :


Plaque circulaire : encastrée sur 3π/4, libre sur 5π/4
{Potentiels d'ordre 0, 1 : +-+-+-+
{Potentiels d'ordre 0, 1, 2, 3 : o-o-o-o
C4.2
log|Deter|
λ
1
1,5
2
2,5
3


log |Deter|
λ
1,3
1,5
2,0
2,5
3
3,5
4
Plaque circulaire : encastrée sur Γ₁
libre sur Γ₂
{ Potentiels d'ordre : 0, 1
{ Potentiels d'ordre : 0, 1, 2, 3
C4.3

P.4.3.- Vue d'ensemble du montage.

1 - 2 Générateur de fréquence et amplificateur.

3 - Excitateur électrodynamique.

4 - Bloc de béton supportant la plaque et les dispositifs d'encadrement de celle-ci.

5 - Compteur de fréquence.

P.4.4.- Plaque et fixation.

1 - Plaque en acier inoxydable.

2 - Deux mors en acier permettant l'encastrement de la plaque par fixation par des boulons sur une couronne en acier solidaire du bloc de béton.

3 - Bloc de béton.

P.4.5.- Détails de la plaque et des mors d'encastrement.

1 - Plaque fixée entre les deux mors.

2 - Plaque avant fixation.

3 - jeu de mors de fixation.

Les différents modes propres sont mis en évidence de façon classique avec du sable de Fontainebleau (voir T.4.8). Les valeurs des fréquences propres relevées sont consignées dans le tableau T.4.7.

Remarque 4.4.

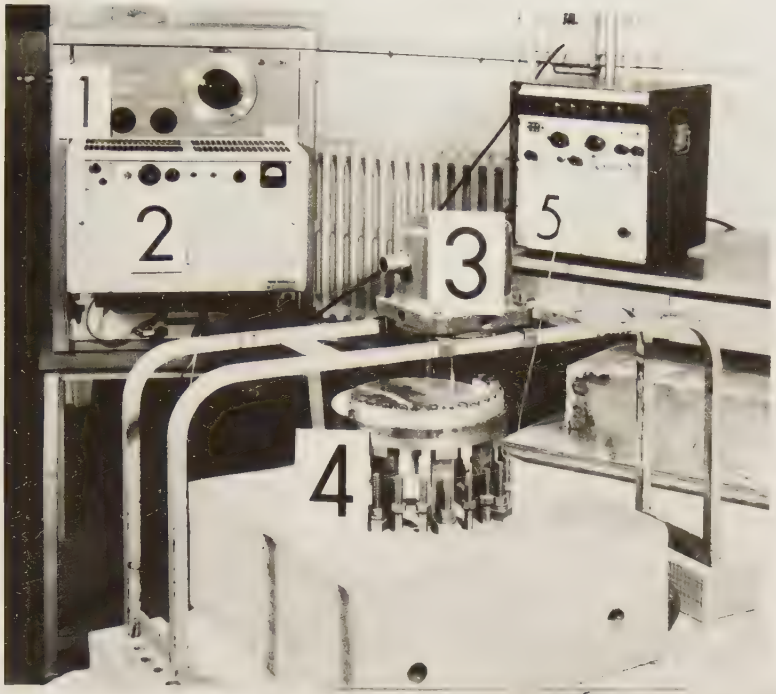
L'épaisseur de la plaque (0,18 cm) a été choisie sensiblement supérieure à celle de la plaque complètement encastrée (0,057 cm) du paragraphe 4.1.2 pour éviter un fléchissement trop important dû au fait qu'une partie du contour est libre.

Remarque 4.5.

Nous n'avons pas choisi un angle d'encastrement inférieur à $\frac{3\Pi}{4}$ pour éviter encore la déformation statique due au bord libre.

Remarque 4.6.

La première fréquence propre (m = 0, ligne nodale sur le bord encastré) a pu être relevée en mesurant l'amplitude maximum du bord libre, ce que nous n'avions pas fait pour la plaque encastrée du paragraphe 4.1.2.



P.4.3

P.4.4.

P.4.5

	Calcul						Expérience							
	$\alpha = 3\Pi/4$			$\alpha = \Pi$			$\alpha = 3\Pi/4$				$\alpha = \Pi$			
m	λ	f_m	f_m/f_o	λ	f_m	f_m/f_o	f_m	ϵ %	f_m/f_o	ϵ %	f_m	ϵ %	f_m/f_o	ϵ %
0	1,16	62	1	1,46	98	1	60	3,3	1		96	2,1	1	
1	2,06	195	3,15	2,52	292	2,98	190	2,6	3,17	0,63	286	2,1	2,98	0
2	2,82	358	5,77	3,07	343	4,42	342	4,6	5,7	1,2	416	4,3	4,34	1,8
3	3,02	418	6,74	3,62	603	6,14	394	6,1	6,57	2,6	584	3,2	6,08	1

T.4.7

m = 0

m = 1

m = 2

m = 3

Encastré sur $3\Pi/4$
libre sur $\frac{5\Pi}{4}$

Encastré sur Π
libre sur Π

T4.8

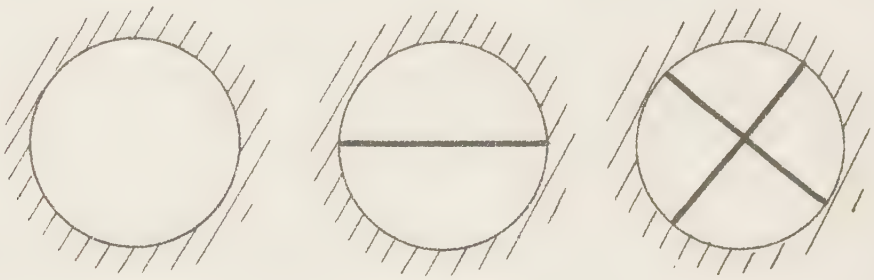
Commentaire sur les tableaux T.4.7 et T.4.8.

Les valeurs expérimentales sont toujours plus basses que celles calculées. L'erreur est au maximum de 6% sur les 4 premières fréquences, ce qui, compte tenu d'une expérience assez grossière et des constantes mécaniques toujours difficiles à déterminer, est acceptable.

Pour s'affranchir des constantes mécaniques, nous comparons les rapports des fréquences expérimentales et calculées : les erreurs relatives sont inférieures à 3%.

Il est bon de rappeler les premières figures de résonance de la plaque encastrée et de la plaque libre correspondante ainsi que les valeurs propres.

plaque encastrée



3, 19 4, 61 5, 90

plaque libre

2, 28

Le phénomène le plus intéressant du problème de la plaque encastrée sur un arc α et libre sur $2\Pi - \alpha$ est que : d'une part, on retrouve les figures de résonance de la plaque complètement encastrée ($m = 0$, $m = 1$, $m = 3$) plus une figure supplémentaire ($m = 2$) n'existant ni pour la plaque libre ni pour la plaque encastrée et d'autre part, la première valeur propre ($m = 0$) est déjà inférieure à la première valeur propre de la plaque totalement libre.

Conclusions sur les plaques à conditions aux limites mêlées.

La résolution de problèmes de plaques à conditions aux limites mêlée par la méthode des potentiels de couches est satisfaisante. Il semble inutile là encore d'employer des couches d'ordre élevé conduisant à une plus grande complexité dans l'établissement des formules des coefficients du déterminant à minimiser et à un temps de calcul sur machine important sans gain appréciable sur les résultats ; toutefois la présence de minimums accentués du déterminant obtenus avec les couches 2 et 3 permettraient, de toutes évidence, une programmation systématique de recherche des minimums plus précise qu'en utilisant les couches 0 et 1 et cela sans faire appel à un analyste au courant du problème.

Les emples que nous venons de traiter peuvent se généraliser facilement lorsque le nombre de morceaux du contour, soumis à des conditions aux limites différentes, est supérieur à 2.

°°°

CONCLUSION GENERALE

La résolution du problème des plaques minces, vibrant en flexion dans le domaine linéaire, avec la méthode des potentiels de couche se révèle pleinement satisfaisante. Ainsi formulé, les deux écueils principaux du problème : forme du contour de la plaque et diversités des conditions aux limites sont éliminés. Il s'ensuit que les deux résultats les plus marquants de ce travail, à savoir ceux qui ont nécessité une vérification expérimentale, démontrent pleinement le bien fondé de notre méthode. Il a été traité en effet, une plaque de forme quelconque et une plaque circulaire encastrée-libre ; ces deux types d'exemples qui, à notre connaissance ne peuvent être résolus aussi complètement par les différentes théories proposées dans la littérature, montren clairement que la technique de résolution par les potentiels de couches permet de s'affranchir aussi bien de la forme de la plaque que des discontinuités dans les conditions aux limites. Ils montrent également que, pour une précision suffisant au physicien l'ordre du déterminant à minimiser est peu élevé (de l'ordre de 70) ; ainsi le temps de calcul et l'encombrement des mémoires du calculateur sont raisonnables.

Enfin, il faut remarquer qu'un choix judicieux de l'ordre des couches, engendrant un déterminant à minimums fortement accentués, permet la mise au point d'un programme universel de recherche automatique des valeurs propres d'une plaque de forme quelconque et soumise à des conditions aux limites quelconques aussi ; toutefois l'emploi de couches d'ordre élevé augmente sensiblement le temps de calcul.

Dans la pratique, l'ingénieur est souvent intéressé par la forme des figures de résonance. Le calcul des lignes nodales, à partir de la connaissance d'une valeur propre approchée, ne présente pas de difficultés théoriques supplémentaires : en utilisant par exemple une méthode d'itérations il est possible de déterminer, à une constante près, le (ou les) vecteur propre de la matrice correspondante, approximation des densités de couches, d'où l'on déduit par quadrature approchée l'élongation en chaque point de la plaque donc ses zéros pour déterminer les lignes nodales.

Il est également possible d'envisager des problèmes à conditions aux limites formées par des combinaisons linéaires des conditions aux limites naturelles pouvant être :

- non dissipatives, telle une plaque "encastrée" dans une structure élastique.

- dissipatives, telle une plaque "encastrée" dans une structure viscoélastique ; dans ce cas certaines valeurs propres à chercher sont complexe

La méthode des potentiels de couches que nous venons d'exposer peut également s'appliquer à des problèmes plus compliqués mais d'un intérêt plus vaste, par exemple : plaque couplée avec un fluide [25] ; ou encore : calcul des fréquences propres d'une plaque à coefficients variables (épaisseur, masse et rigidité variables). Dans ce dernier cas, il est nécessaire de connaitre la solution élémentaire vérifiant le principe de conservation de l'énergie : diverses méthodes ont été proposées par I. N. Vekua [15], St. Bergman [24] et leurs disciples.

°°°

ANNEXES

Annexe 1

CALCUL DES COEFFICIENTS $A_{ii}^{1,2,3,4}$.

Soient à calculer :

$$(A1.0) \qquad A_{ii}^{1,2,3,4} = (-1)^{0,1} \ell_{1,2}(M) \lim_{M \to P_i^-} \int_{\Gamma_j} \delta_{n_P}^{0,1} G(\lambda\rho) dP$$

avec $\rho = |M - P|$

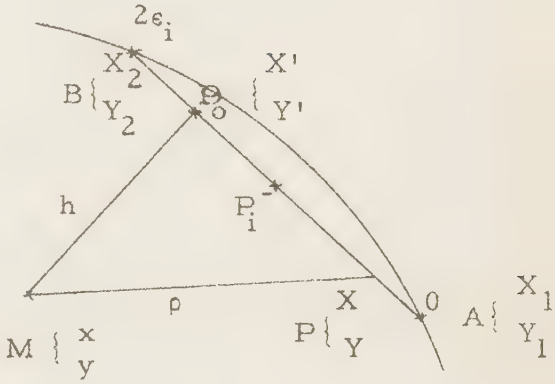
Nous remplaçons l'arc Γ_j par le segment de corde correspondant $2\epsilon_j (2\epsilon_i)$

$M \in \Omega$

h distance de M à $(0, 2\epsilon_i)$, $h < 2\epsilon_i$

$P \in (0, 2\epsilon_i)$ point courant

P_i^- point de contrôle au milieu de $(0, 2\epsilon_i)$



$\lambda\rho$ étant petit ($\lambda\rho < 2$) nous remplaçons les fonctions de Bessel de $\delta_{n_P}^{0,1} G(\lambda\rho)$ par leur serie ascendante [26] et $\frac{\partial\rho}{\partial n_P}$ par $\frac{h}{\rho}$, il vient :

pour un potentiel d'ordre 0 :

$$(A1.1) \quad \left\{ \begin{aligned} G(\lambda\rho) \sim \frac{1}{2\lambda^2} \cdot \frac{1}{\Pi} \Big\{ \log \frac{\lambda\rho}{2} \Big[A_1 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^2 + A_2 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^6 + A_4 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^{10} + \dots \Big] \\ + \bar{A}_1 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^2 + \bar{A}_2 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^6 + \bar{A}_3 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^{10} + \dots \Big\} + \frac{1}{2\lambda^2} \frac{i}{4} \Big\{ a_1 - a_2 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^2 \\ + a_3 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^4 - a_4 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^6 + a_5 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^8 - a_6 \Big(\frac{\lambda\rho}{2}\Big)^{10} \dots \Big\} \end{aligned} \right.$$

pour un potentiel d'ordre 1 :

$$(A1.2)\quad \begin{cases} \partial_{n_P} G(\lambda\rho) \sim \frac{1}{4}\frac{h}{\Pi}\{\log\frac{\lambda\rho}{2}[B_1+B_2(\frac{\lambda\rho}{2})^4+B_4(\frac{\lambda\rho}{2})^8+\dots] \\ \quad +\bar{B}_1+\bar{B}_2(\frac{\lambda\rho}{2})^4+\bar{B}_3(\frac{\lambda\rho}{2})^8+\dots\} \\ \quad -\frac{i}{4}\frac{h}{4}\{b_1-b_2(\frac{\lambda\rho}{2})^2+b_3(\frac{\lambda\rho}{2})^4-b_4(\frac{\lambda\rho}{2})^6+b_5(\frac{\lambda\rho}{2})^8\dots\} \end{cases}$$

avec :

$$A_1 = 1 \quad , \quad A_2 = (\frac{1}{3!})^2 \quad , \quad A_3 = (\frac{1}{5!})^2$$

$$\bar{A}_1 = \gamma - 1 \quad , \quad \bar{A}_2 = (\frac{1}{3!})^2(\gamma - \frac{11}{3!}) \quad , \quad \bar{A}_3 = (\frac{1}{5!})^2(\gamma - \frac{274}{5!})$$

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = (\frac{1}{1!})^2 \quad , \quad a_3 = (\frac{1}{2!})^2 \quad , \quad a_4 = (\frac{1}{3!})^2 \quad , \quad a_5 = (\frac{1}{4!})^2 \quad , \quad a_6 = (\frac{1}{5!})^2 \quad ,$$

$$B_1 = 1 \quad , \quad B_2 = \frac{1}{3!2!} \quad , \quad B_3 = \frac{1}{5!4!}$$

$$\bar{B}_1 = \gamma - \frac{1}{2} \quad , \quad \bar{B}_2 = \frac{1}{3!2!}(\gamma - \frac{10}{3!}) \quad , \quad \bar{B}_3 = \frac{1}{5!4!}(\gamma - \frac{262}{5!})$$

$$b_1 = 1 \quad , \quad b_2 = \frac{1}{2!1!} \quad , \quad b_3 = \frac{1}{3!2!} \quad , \quad b_4 = \frac{1}{4!3!} \quad , \quad b_5 = \frac{1}{5!4!}$$

γ constante d'Euler.

Soient :

$$(A1.3)\quad I_o(M) = \int_{\Gamma_j} G(\lambda\rho)dP$$

$$(A1.4)\quad I_1(M) = -\int_{\Gamma_j} \partial_{n_P} G(\lambda\rho)dP$$

On effectue le changement de variable suivant :

si $r = \overline{AP}$, $dr = dP$ et si $t = \overline{P_i B}$, il s'ensuit que :

$$\rho = [(\epsilon_i + t - r)^2 + h^2]^{1/2} \qquad \text{pour} \quad 0 < r < \epsilon_i + t$$

$$\rho = [(r - \epsilon_i - t)^2 + h^2]^{1/2} \qquad \text{pour } \epsilon_i + t < r < 2\epsilon_i$$

on pose :

$$x_1 = \frac{\lambda}{2}(\epsilon_i + t - r)\ ,\ dr = -\frac{2}{\lambda}\,dx_1\ ,\ x_1 \begin{cases} 0 \\ \frac{\lambda}{2}(\epsilon_i + t) \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{\lambda}{2}(r - \epsilon_i - t)\ ,\ dr = \frac{2}{\lambda}\,dx_2\ ,\quad x_2 \begin{cases} \frac{\lambda}{2}(\epsilon_i - t) \\ 0 \end{cases}$$

on a :

$$\frac{\lambda\rho}{2} = \left[x_1^2 + \left(\frac{\lambda h}{2}\right)^2\right]^{1/2}\ ,\quad \frac{\lambda\rho}{2} = \left[x_2^2 + \left(\frac{\lambda h}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

En remplaçant dans (A1.1) et (A1.2) $\frac{\lambda\rho}{2}$ par ces valeurs, (A1.3) et (A1.4) deviennent :

$$\text{(A1.5)}\qquad I_o(M) = \frac{2}{\lambda}\left\{\int_o^{\frac{\lambda}{2}(\epsilon_i + t)} G(x_1)dx_1 + \int_o^{\frac{\lambda}{2}(\epsilon_i - t)} G(x_2)dx_2\right\}$$

$$\text{(A1.6)}\qquad I_1(M) = -\frac{2}{\lambda}\left\{\int_o^{\frac{\lambda}{2}(\epsilon_i + t)} G(x_1)dx_1 + \int_o^{\frac{\lambda}{2}(\epsilon_i - t)} G(x_2)dx_2\right\}$$

En effectuant la quadrature de (A1.5) et (A1.6) et en posant :

$$\text{(A1.7)}\qquad \begin{cases} y_1 = \epsilon_1 + t\ , & y_2 = \epsilon_i - t \\ v_1 = \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + h^2)^{1/2}\ , & v_2 = \frac{\lambda}{2}(y_2^2 + h^2)^{1/2}\ , \end{cases}$$

il vient en se limitant aux termes en h de degré inférieur à 4 :

$$
\begin{aligned}
I_o(M) \sim \frac{1}{\Pi\lambda^3} \{ & (\tfrac{\lambda}{2})^3 A_1 \left[\log v_1 (\frac{y_1^3}{3} + y_1 h^2) + \log v_2 (\frac{y_2^3}{3} + y_2 h^2)\right. \\
& \left. - \frac{1}{9}(y_1^3 + y_2^3) - \frac{2}{3} h^2 (y_1 + y_2) + \frac{2}{3} h^3 (\operatorname{arctg} \frac{y_1}{h} + \operatorname{arctg} \frac{y_2}{h})\right] \\
& (\tfrac{\lambda}{2})^7 A_2 \left[\log v_1 (\frac{y_1^7}{7} + \frac{3}{5} h^2 y_1^5) + \log v_2 (\frac{y_2^7}{7} + \frac{3}{5} h^2 y_2^5)\right. \\
& \left. - \frac{1}{49}(y_1^7 + y_2^7) - \frac{16}{175} h^2 (y_1^5 + y_2^5)\right] + \\
& + (\tfrac{\lambda}{2})^{11} A_3 \left[\log v_1 (\frac{y_1^{11}}{11} + \frac{5}{9} h^2 y_1^9) + \log v_2 (\frac{y_2^{11}}{11} + \frac{5}{9} h^2 y_2^9)\right. \\
& \left. - \frac{1}{121}(y_1^{11} + y_2^{11}) - \frac{46}{891} h^2 (y_1^9 + y_2^9)\right] + (\tfrac{\lambda}{2})^3 \bar{A}_1 (\frac{y_1^3}{3} + h^2 y_1 + \frac{y_2^3}{3} + h^2 y_2) \\
& + (\tfrac{\lambda}{2})^7 \bar{A}_2 (\frac{y_1^7}{7} + \frac{3}{5} h^2 y_1^5 + \frac{y_2^7}{7} + \frac{3}{5} h^2 y_2^5) + (\tfrac{\lambda}{2})^{11} \bar{A}_3 (\frac{y_1^{11}}{11} + \frac{5}{9} h^2 y_1^9 \\
& + \frac{y_2^{11}}{11} + \frac{5}{9} h^2 y_2^9) + \ldots \} + \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{i}{4} \{ a_1 \tfrac{\lambda}{2} (y_1 + y_2) \\
& - a_2 (\tfrac{\lambda}{2})^3 [\tfrac{1}{3}(y_1^3 + y_2^3) + h^2 (y_1 + y_2)] + a_3 (\tfrac{\lambda}{2})^5 [\frac{y_1^5 + y_2^5}{5} + \frac{2}{3} h^2 (y_1^3 + y_2^3)] \\
& - a_4 (\tfrac{\lambda}{2})^7 [\frac{y_1^7 + y_2^7}{7} + \frac{3}{5} h^2 (y_1^5 + y_2^5)] + a_5 (\tfrac{\lambda}{2})^9 [\frac{y_1^9 + y_2^9}{9} + \frac{4}{7} h^2 (y_1^7 + y_2^7)] \\
& - a_6 (\tfrac{\lambda}{2})^{11} [\frac{y_1^{11} + y_2^{11}}{11} + \frac{5h^2}{9} (y_1^9 + y_2^9)] \ldots \}
\end{aligned}
\tag{A1.8}
$$

$$
(A1.9)\quad
\left\{
\begin{aligned}
I_1(M) \sim & -\frac{1}{\Pi\lambda^2}\Big\{\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2 B_1\Big[h y_1 \log v_1 + h y_2 \log v_2 - h(y_1+y_2) \\
& + h^2\Big(\operatorname{arctg}\frac{y_1}{h} + \operatorname{arctg}\frac{y_2}{h}\Big)\Big] + \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^6 B_2\Big[\Big(h\frac{y_1^5}{5} + \frac{2}{3}h^3 y_1^3\Big)\log v_1 \\
& + \Big(h\frac{y_2^5}{5} + \frac{2}{3}h^3 y_2^3\Big)\log v_2 - \frac{h}{25}(y_1^5 + y_2^5) - \frac{7h^2}{45}(y_1^3 + y_2^3)\Big] \\
& + \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^{10} B_3\Big[\Big(h\frac{y_1^9}{9} + \frac{4}{7}h^3 y_1^7\Big)\log v_1 + \Big(\frac{h y_2^9}{9} + \frac{4}{7}h^3 y_2^9\Big)\log v_2 - \frac{h}{81}(y_1^9 + y_2^9) \\
& - \frac{29h^3}{441}(y_1^7 + y_2^7)\Big] + \ldots + \bar{B}_1\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2 h(y_1+y_2) + \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^6 \bar{B}_2\Big[\frac{h}{5}(y_1^5 + y_2^5) \\
& + \frac{2h^3}{3}(y_1^3 + y_2^3)\Big] + \Big(\frac{\lambda}{9}\Big)^{10} \bar{B}_3\Big[\frac{h}{9}(y_1^9 + y_2^9) + \frac{4h^3}{7}(y_1^7 + y_2^7)\Big] \ldots \Big\} \\
& + \frac{i}{4\lambda^2}\Big\{\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2 b_1(h y_1 + h y_2) - \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^4 b_2\Big[\frac{h}{3}(y_1^3 + y_2^3) + h^3(y_1 + y_2)\Big] \\
& + \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^6 b_3\Big[\frac{h}{5}(y_1^5 + y_2^5) + \frac{2}{3}h^3(y_1^3 + y_2^3)\Big] - \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^8 b_4\Big[\frac{h}{7}(y_1^7 + y_2^7) + \frac{3h^2}{5}(y_1^5 + y_2^5)\Big] \\
& + \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^{10} b_5\Big[\frac{h}{9}(y_1^9 + y_2^9) + \frac{4h^3}{7}(y_1^7 + y_2^7)\Big] \ldots \Big\}
\end{aligned}
\right.
$$

Avant d'expliciter les valeurs des coefficients $A_{ii}^{1,2,3,4}$ à partir de $I_o(M)$, $I_1(M)$ qui sont des fonctions de h, y_1 , y_2 , v_1 , v_1 , v_2 , il est bon de donner les règles de dérivation normale et tangente :

$$
(A1.10)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial I_{0,1}(M)}{\partial n_M} &= \frac{\partial I}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial n_M} + \frac{\partial I}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial n_M} + \frac{\partial I}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial n_M} + \frac{\partial I}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial n_M} + \frac{\partial I}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial n_M} \\
\frac{\partial I_{0,1}(M)}{\partial s_M} &= \frac{\partial I}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial s_M} + \frac{\partial I}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial s_M} + \frac{\partial I}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial s_M} + \frac{\partial I}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial s_M} + \frac{\partial I}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial s_M}
\end{aligned}
\right.
$$

avec :

$$
(A1.11)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial n_M} = -1\ ,\ \frac{\partial y_1}{\partial n_M} = 0\ ,\ \frac{\partial y_2}{\partial n_M} = 0\ ,\ \frac{\partial v_1}{\partial n_M} = -\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2\frac{h}{v_1}\ ,\ \frac{\partial v_2}{\partial n_M} = -\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2\frac{h}{v_2} \\
&\frac{\partial h}{\partial s_M} = 0\ ,\ \frac{\partial y_1}{\partial s_M} = 1\ ,\ \frac{\partial y_2}{\partial s_M} = -1\ ,\ \frac{\partial v_1}{\partial s_M} = \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2\frac{h}{v_1}\ ,\ \frac{\partial v_2}{\partial s_M} = -\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2\frac{h}{v_2}
\end{aligned}
\right.
$$

en remplaçant (A1.11) dans (A1.10 il vient :

$$(A1.12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial I_{0,1}(M)}{\partial n_M} = -\dfrac{\partial I}{\partial h} - \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2\left[\dfrac{h}{v_1}\dfrac{\partial I}{\partial v_1} + \dfrac{h}{v_2}\dfrac{\partial I}{\partial v_2}\right] \\ \dfrac{\partial I_{0,1}(M)}{ds_M} = \dfrac{\partial I}{\partial y_1} - \dfrac{\partial I}{\partial y_2} + \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2\left[\dfrac{y_1}{v_1}\dfrac{\partial I}{\partial v_1} - \dfrac{y_2}{v_2}\dfrac{\partial I}{\partial v_2}\right] \end{cases}$$

Par définition à partir des formules (A1.0) et (A1.3), (A1.4) nous avons :

$$\begin{cases} A^1_{ii} = \lim\limits_{M\to P_i^-} \displaystyle\int_{\Gamma_i} G(\lambda|M-P|)\,dP = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} I_o(M) \\ A^2_{ii} = -\lim\limits_{M\to P_i^-} \displaystyle\int_{\Gamma_i} \partial_{n_P} G(\lambda|M-P|)\,dP = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} I_1(M) \\ A^3_{ii} = \dfrac{\partial}{\partial n_M} \lim\limits_{M\to P_i^-} \displaystyle\int_{\Gamma_i} G\,dP = \dfrac{\partial}{\partial n_M} \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} [I_o(M)] \\ A^4_{ii} = -\dfrac{\partial}{\partial n_M} \lim\limits_{M\to P_i^-} \displaystyle\int_{\Gamma_i} \partial_{n_P} G\,dP = \dfrac{\partial}{\partial n_M} \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} [I_1(M)] \end{cases}$$

avec :

$$(A1.13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial I_o}{\partial n_M} \sim -\dfrac{1}{\lambda^3 \Pi}\Big\{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^3 A_1\Big[2h(y_1\log v_1 + y_2\log v_2) - \dfrac{4}{3}h(y_1+y_2) \\ \quad +2h^2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y_1}{h} + \operatorname{arctg}\dfrac{y_2}{h}\right) + \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2\dfrac{h}{3}\left(\dfrac{y_1^3}{v_1^2} + \dfrac{y_2^3}{v_2^2}\right)\Big] + \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^7 A_2\Big[\dfrac{6}{5}h(y_1^5\log v_1 + \\ \quad + y_2^5\log v_2) - \dfrac{32}{175}h^2(y_1^5+y_2^5) + \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2\dfrac{h}{7}\left(\dfrac{y_1^7}{v_1^2} + \dfrac{y_2^7}{v_2^2}\right)\Big] + \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{11} A_3\Big[\dfrac{10}{9}h(y_1^9\log v_1 \\ \quad + y_2^9\log v_2) - \dfrac{92}{831}h(y_1^9+y_2^9) + \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2\dfrac{h}{11}\left(\dfrac{y_1^{11}}{v_1^2} + \dfrac{y_2^{11}}{v_2^2}\right)\Big] + 2\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)^3 \bar{A}_1 h(y_1^2+y_2^2) \\ \quad + \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^7 \bar{A}_2 h(y_1^5+y_2^5) + \dfrac{10}{9}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{11} \bar{A}_3 h(y_1^9+y_2^9) + \ldots\Big\} + \dfrac{i}{4\lambda^3}\Big\{2\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^3 a_2 h(y_1+y_2) \\ \quad - \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^5 a_3 h(y_1^3+y_2^3) + \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^7 a_4 h(y_1^5+y_2^5) - \dfrac{8}{7}a_5\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^9 h(y_1^7+y_2^7) \\ \quad + \dfrac{10}{9}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{11} a_6 h(y_1^9+y_2^9) \ldots\Big\} \end{cases}$$

$$
(A1.14)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial I_1}{\partial n_M} \sim \dfrac{1}{\Pi\lambda^2}\Big\{(\dfrac{\lambda}{2})^2 B_1\big[y_1\log v_1 + y_2\log v_2 - (y_1+y_2) + 2h(\operatorname{arctg}\dfrac{y_1}{h} + \operatorname{arctg}\dfrac{y_2}{h})\\
\quad - h^2(\dfrac{y_1}{y_1^2+h^2} + \dfrac{y_2}{y_1^2+h^2}) + (\dfrac{\lambda}{2})^2 h^2(\dfrac{y_1}{v_1^2} + \dfrac{y_2}{v_2^2}) + (\dfrac{\lambda}{2})^6 B_2\big[(\dfrac{y_1^5}{5} + 2h^2 y_1^3)\log v_1\\
\quad + (\dfrac{y_2^5}{5} + 2h^2 y_2^3)\log v_2 - \dfrac{y_1^5+y_2^5}{25} - \dfrac{7h^2}{15}(y_1^3+y_2^3) + (\dfrac{\lambda}{2})^2 \dfrac{h^2}{5}(\dfrac{y_1^5}{v_1^2} + \dfrac{y_2^5}{v_2^2})\big]\\
\quad + (\dfrac{\lambda}{2})^{10} B_3\big[(\dfrac{y_1^9}{9} + \dfrac{12}{7}h^2 y_1^7)\log v_1 + (\dfrac{y_2^9}{9} + \dfrac{12}{7}h^2 y_2^7)\log v_2 - \dfrac{y_1^9+y_2^9}{9}\\
\quad - \dfrac{29}{147}h^2(y_1^7+y_2^7) + (\dfrac{\lambda}{2})^2 \dfrac{h^2}{9}(\dfrac{y_1^9}{v_1^2} + \dfrac{y_2^9}{v_2^2})\big] + \bar{B}_1(\dfrac{\lambda}{2})^2(y_1+y_2) + \bar{B}_2(\dfrac{\lambda}{2})^6\big[\dfrac{y_1^5+y_2^5}{5}\\
\quad + 2h^2(y_1^3+y_2^3)\big] + \bar{B}_3(\dfrac{\lambda}{2})^{10}\big[\dfrac{y_1^9+y_2^9}{9} + \dfrac{12}{7}h^2(y_1^7+y_2^7)\big] + \ldots\Big\}\\
\quad - \dfrac{12}{4\lambda^2}h^2(y_1^7+y_2^7)\big] + \ldots\Big\} - \dfrac{i}{4\lambda^2}\Big\{(\dfrac{\lambda}{2})^2 b_1(y_1+y_2) - (\dfrac{\lambda}{2})^4 b_2\big[\dfrac{y_1^3+y_2^3}{3}\\
\quad + 3h^2(y_1^2+y_2^2)\big] + (\dfrac{\lambda}{6})^6 b_3\big[\dfrac{y_1^5+y_2^5}{5} + 2h^2(y_1^3+y_2^3)\big] - (\dfrac{\lambda}{2})^8 b_4\big[\dfrac{y_1^7+y_2^7}{7}\\
\quad + \dfrac{9h^2}{5}(y_1^5+y_2^5)\big] + (\dfrac{\lambda}{2})^{10} b_5\big[\dfrac{y_1^9+y_2^9}{9} + \dfrac{12}{7}h^2(y_1^7+y_2^7)\big] \ldots\Big\}
\end{cases}
$$

En faisant tendre h et t vers zéro dans les formules (A1.8), (A1.9), (A1.13) et (A1.14), on en déduit les coefficients $A_{ii}^{1,2,3,4}$ c'est-à-dire :

$$
(A1.15)\quad
\begin{cases}
A^1_{ii} \sim \dfrac{\epsilon_i}{\lambda^2}\,\dfrac{1}{\Pi}\left\{\dfrac{z_i^2}{3}(\log z_i+\gamma-\dfrac{4}{3})+\dfrac{z_i^6}{252}(\log z_i+\gamma-\dfrac{83}{42})+\dfrac{z_i^{10}}{158400}(\log z_i\right. \\
\qquad \left. +\gamma-\dfrac{1567}{660})+\ldots\right\}+\dfrac{\epsilon_i}{\lambda^2}\,\dfrac{i}{4}\left\{1-\dfrac{z_i^2}{3}+\dfrac{z_i^4}{20}-\dfrac{z_i^6}{252}+\dfrac{z_i^8}{5184}-\dfrac{z_i^{10}}{158400}\ldots\right\} \\
A^2_{ii} \sim 0 \\
A^3_{ii} \sim 0 \\
A^4_{ii} \sim \dfrac{\epsilon_i}{2\Pi}\left\{\log z_i+\gamma-\dfrac{3}{2}+\dfrac{z_i^4}{60}(\log z_i+\gamma-\dfrac{28}{15})+\dfrac{z_i^8}{25920}(\log z_i+\gamma\right. \\
\qquad \left. -\dfrac{413}{180})+\ldots\right\}-\dfrac{i}{4}\,\dfrac{\epsilon_i}{2}\left\{1-\dfrac{z_i^2}{6}+\dfrac{z_i^4}{60}+\dfrac{z_i^8}{25920}\ \ldots\right\}
\end{cases}
$$

avec $z_i = \dfrac{\lambda\epsilon_i}{2}$, γ constante d'Euler.

Les résultats (A1.15) sont donnés au chapitre 3 formules (3.33).

°°°

Annexe 2

CALCUL DE $\tilde{A}_{ij}^{1,2,3,4}$ PAR DEVELOPPEMENT EN ONDES CYLINDRIQUES CENTREES EN P_j.

(A2.1)

$$\tilde{A}_{ij}^{1} = -\frac{1}{2\lambda^2} \int_{\Gamma_j} F_1(\lambda\rho)\,dP \qquad \text{(A2.1.1)}$$
$$\lim M \to P_i^-$$

$$\tilde{A}_{ij}^{2} = -\frac{1}{2\lambda} \int_{\Gamma_j} F_2(\lambda\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial n_P}\,dP \qquad \text{(A2.1.2)}$$
$$\lim M \to P_i^-$$

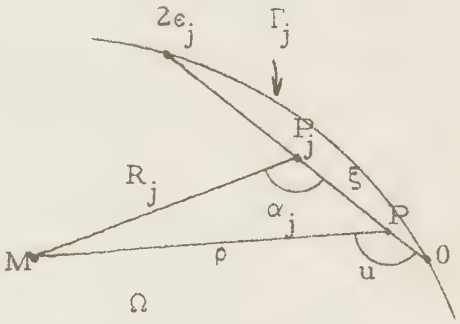
$$\tilde{A}_{ij}^{3} = -\frac{1}{2\lambda^2}\,\frac{\partial}{\partial n_M} \int_{\Gamma_j} F_1(\lambda\rho)\,dP \qquad \text{(A2.1.3)}$$
$$\lim M \to P_i^-$$

$$\tilde{A}_{ij}^{4} = -\frac{1}{2\lambda^2}\,\frac{\partial}{\partial n_M} \int_{\Gamma_j} F_2(\lambda\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial n_P}\,dP \qquad \text{(A2.1.4)}$$
$$\lim M \to P_i^-$$

avec :

$$F_1 = \frac{1}{2\Pi} K_o(\lambda\rho) + \frac{1}{4} Y_o(\lambda\rho) - \frac{i}{4} J_o(\lambda\rho)$$

$$F_2 = \frac{1}{2\Pi} K_1(\lambda\rho) + \frac{1}{4} Y_1(\lambda\rho) - \frac{i}{4} J_1(\lambda\rho)\,,\quad \rho = |M - P|$$



Le point M est pris dans Ω, P est le point d'intégration sur le segment $(0, 2\varepsilon_j)$. Le calcul des intégrales (A1.1) ne pouvant être effectué directement, nous développons en ondes cylindriques - faisant intervenir ξ, R, α - les noyaux $F_1(\lambda\rho)$ et $F_2(\lambda\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial n_P}$ par les formules d'additions de Neumann si l'indice de la fonction de Bessel est zéro et de Gegenbauer [26] si l'indice est ≥ 1, en remarquant que $\frac{\partial\rho}{\partial n_P} = \sin u$ et que $\rho \sin u = R \sin\alpha$, il vient :

$$(A2.2)\quad \begin{cases} F_1(\lambda R, \lambda\xi, \alpha) = \frac{1}{2\Pi}\left[K_o(\lambda R)I_o(\lambda\xi) + 2\sum_{m=1}^{\infty} K_{2m}(\lambda R)I_{2m}(\lambda\xi)\cos 2m\alpha\right] \\ \qquad + \frac{1}{4}\left[Y_o(\lambda R)J_o(\lambda\xi) + 2\sum_{m=1}^{\infty} Y_{2m}(\lambda R)J_{2m}(\lambda\xi)\cos 2m\alpha\right] \\ \qquad - \frac{i}{4}\left[J_o(\lambda R)J_o(\lambda\xi) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(\lambda R)J_{2m}(\lambda\xi)\cos 2m\alpha\right] \end{cases}$$

$$(A2.3)\quad \begin{cases} F_2(\lambda R, \lambda\xi, \alpha) = \frac{2}{\Pi}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)K_{2m+1}(\lambda R)\frac{I_{2m+1}(\lambda\xi)}{\lambda\xi}\sin(2m+1)\alpha \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)Y_{2m+1}(\lambda R)\frac{J_{2m+1}(\lambda\xi)}{\lambda\xi}\sin(2m+1)\alpha \\ \qquad - \frac{i}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)J_{2m+1}(\lambda R)\frac{J_{2m+1}(\lambda\xi)}{\lambda\xi}\sin(2m+1)\alpha \end{cases}$$

Remarque.

$F_1(\lambda\rho)$ et $F_2(\lambda\rho)$ ne dépendant que de ρ, c'est-à-dire de la distance de M à P, nous ne prendrons donc que les termes pairs dans la formule (A2.2) et d'ordre impair dans la formule (A2.3) afin d'avoir :

$$\begin{cases} F_1(\lambda R, \lambda\xi, \alpha) = F_1(\lambda R, \lambda\xi, \Pi - \alpha) \\ F_2(\lambda R, \lambda\xi, \alpha) = F_2(\lambda R, \lambda\xi, \Pi - \alpha) \end{cases}$$

$\lambda\xi$ étant petit ($\lambda\xi < 2$), nous pouvons remplacer les fonctions de Bessel d'argument $\lambda\xi$ par leur développement en série ascendante en fonction des puissances $\frac{\lambda\xi}{2}$ et effectuer la quadrature, moyennant le changement de variable $\xi = \epsilon - r$ ou $\xi = r - \epsilon$ $dr = dP$, de la même façon que dans l'annexe 1.

Moyennant cela tous calculs faits il vient :

$$(A2.4)\quad -\frac{1}{2\lambda^2}\int_{\Gamma_j} F_1(\lambda\rho)dP \sim -\frac{\epsilon_j}{\lambda^2}\left[C_o + C_2\cos 2\alpha_j + C_4\cos 4\alpha_j + \ldots\right]$$

$$(A2.5)\quad -\frac{1}{2\lambda}\int_{\Gamma_j} F_2(\lambda\rho)\frac{\partial\rho}{\partial n_P}dP \sim -\frac{\epsilon_j}{\lambda}\left[C_1\sin\alpha_j + C_3\sin 3\alpha_j + C_5\sin 5\alpha_j + \ldots\right]$$

Avec

$$(A2.6)\quad C_n(\lambda R_j) = a_n K_n(\lambda R_j) + b_n\left[Y_n(\lambda R_j) - iJ_n(\lambda R_j)\right]$$

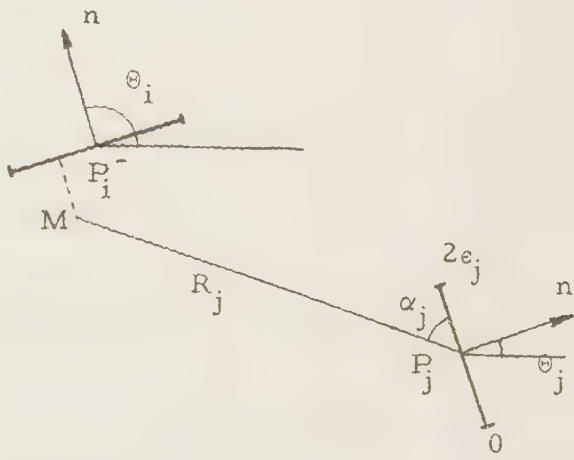
pour $n = 0, 1, \ldots, 5$

$$
(A2.7)\quad \begin{cases}
a_o = \frac{1}{2\Pi}\left(1 + \frac{z_j^2}{3} + \frac{z_j^4}{20}\right), & b_o = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z_j^2}{3} + \frac{z_j^4}{20}\right) \\
a_1 = \frac{1}{2\Pi}\left(1 + \frac{z_j^2}{6} + \frac{z_j^4}{60}\right), & b_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z_j^2}{6} + \frac{z_j^4}{60}\right) \\
a_2 = \frac{1}{2\Pi}\left(\frac{z_j^2}{3} + \frac{z_j^4}{10}\right), & b_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{z_j^2}{3} - \frac{z_j^4}{15}\right) \\
a_3 = \frac{1}{2\Pi}\left(\frac{z_j^2}{6} + \frac{z_j^4}{40}\right), & b_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{z_j^2}{6} - \frac{z_j^4}{40}\right) \\
a_4 = \frac{1}{2\Pi}\,\frac{z_j^4}{60}, & b_4 = \frac{1}{4}\,\frac{z_j^4}{60} \\
a_5 = \frac{1}{2\Pi}\,\frac{z_j^4}{120}, & b_5 = \frac{1}{4}\,\frac{z_j^4}{120}
\end{cases}
$$

$z_j = \frac{\lambda \epsilon_j}{2}$, R_j : distance du point P_j milieu de $(0, 2\epsilon_j)$ au point $M \in \Omega$.

Règle de dérivation normale suivant le point M.

M est une fonction de R_j et de l'angle α_j



$$M \begin{cases} x \\ y \end{cases}, \quad P_j \begin{cases} X_j \\ Y_j \end{cases}, \quad P_i \begin{cases} x_i \\ y_i \end{cases}$$

avec :

$$R_j = \left[(X_j - x)^2 + (Y_j - y)^2\right]^{1/2}$$

$$\sin\alpha_j = \frac{(X_j - x)\cos\Theta_j + (Y_j - y)\sin\Theta_j}{R_j} = \frac{\partial R_j}{\partial n_{P_j}}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_M} = \frac{\partial}{\partial R_j}\,\frac{\partial R_j}{\partial n_M} + \frac{\partial}{\partial n_M}(\sin\alpha_j)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_M}(\sin\alpha_j) = -\frac{1}{R_j}\left[\cos(\Theta_j - \Theta_i) + \sin\alpha_j\,\frac{\partial R_j}{\partial n_M}\right]$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial n_M} = -\frac{(X_j - x_i)\cos\Theta_i + (Y_j - y_i)\sin\Theta_i}{R_i}$$

En appliquant cette règle de dérivation à (A2.4) et (A2.5) il vient :

$$(A2.10)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2\lambda^2}\,\frac{\partial}{\partial n_M}\int_{\Gamma_j} dP \sim \frac{\epsilon_j}{\lambda}\,\{[\bar{C}_o + \bar{C}_2\cos 2\alpha_j + \bar{C}_4\cos 4\alpha_j]\,\frac{\partial R_j}{\partial n_M} \\ \qquad + \frac{1}{\lambda R_j}\,[C_2 f_2(\alpha_j) + C_4 f_4(\alpha_j) + \ldots\ ]\} \end{cases}$$

$$(A2.11)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2\lambda}\,\frac{\partial}{\partial n_M}\int_{\Gamma_j} F_2\,\frac{\partial \rho}{\partial n_P}\,dP \sim \epsilon_j\,\{[\bar{C}_1\sin\alpha_j + \bar{C}_3\sin 3\alpha_j + \bar{C}_5\sin 5\alpha_j]\,\frac{\partial R_j}{\partial n_M} \\ \qquad + \frac{1}{\lambda R_j}\,[C_1 f_1(\alpha_j) + C_3 f_3(\alpha_j) + C_5 f(\alpha_j)\ \ldots]\} \end{cases}$$

avec :

$$(A2.12)\quad \bar{C}_n = a_n K_{n+1}(\lambda R_j) + b_n[Y_{n+1}(\lambda R_j) - i J_{n+1}(\lambda R_j)]$$

$n = 0, 1, \ldots, 5$, les a_n et b_n sont donnés par (A2.7)

$$(A2.13)\quad \begin{cases} f_1 = \cos(\theta_j - \theta_i) \\ f_2 = -2\,[\frac{\partial R_j}{\partial n_M} + 2\sin\alpha_j\cos(\theta_j - \theta_i)] \\ f_3 = -3\,[2\sin\alpha_j\,\frac{\partial R_j}{\partial n_M} + (4\sin^2\alpha_j - 1)\cos(\theta_j - \theta_i)] \\ f_4 = -4\,[(1 - 4\sin^2\alpha_j)\,\frac{\partial R_j}{\partial n_M} + (4\sin\alpha_j - 8\sin^3\alpha_j)\cos(\theta_j - \theta_i)] \\ f_5 = -5\,[(4\sin\alpha_j - 8\sin^3\alpha_j)\,\frac{\partial R_j}{\partial n_M} - (1 - 12\sin^2\alpha_j + 16\sin^4\alpha_j)\cos(\theta_j - \theta_i)] \end{cases}$$

En passant à la limite, c'est-à-dire $M \to P_i^-$, il vient dans les expressions (A2.4,5) et (A2.10,11) :

$$
(A2.14)\quad
\begin{cases}
\tilde{A}^1_{ij} \sim -\dfrac{\epsilon_j}{\lambda^2}\left\{C_o(\lambda R_{ij}) + C_2\cos 2\alpha_{ij} + C_4\cos 4\alpha_{ij} \ldots\right\} \\
\tilde{A}^2_{ij} \sim -\dfrac{\epsilon_j}{\lambda}\left\{C_1(\lambda R_{ij})\sin\alpha_{ij} + C_3\sin 3\alpha_{ij} + C_5\sin 5\alpha_{ij} + \ldots\right\} \\
\tilde{A}^3_{ij} \sim \dfrac{\epsilon_j}{\lambda}\left\{\left[\overline{C_o}(\lambda R_{ij}) + \overline{C_2}\cos 2\alpha_{ij} + \overline{C_4}\cos 4\alpha_{ij} + \ldots\right]\dfrac{\partial R_{ij}}{\partial n_{P_i}}\right. \\
\qquad \left. + \dfrac{1}{\lambda R_{ij}}\left[C_2 f_2(\alpha_{ij}) + C_4 f_4(\alpha_{ij}) + \ldots\right]\right\} \\
\tilde{A}^4_{ij} \sim \epsilon_j\left\{\left[\overline{C}_1(\lambda R_{ij})\sin\alpha_{ij} + \overline{C}_3\sin 3\alpha_{ij} + \overline{C}_5\sin 5\alpha_{ij} + \ldots\right]\dfrac{\partial R_{ij}}{\partial n_{P_i}}\right. \\
\qquad \left. + \dfrac{1}{\lambda R_{ij}}\left[C_1 f_1(\alpha_{ij}) + C_3 f_3(\alpha_{ij}) + C_5 f_5(\alpha_{ij}) + \ldots\right]\right\}
\end{cases}
$$

Les nouveaux C_n , $\overline{C}_n$, $f_n(\alpha_{ij})$ ont les mêmes expressions qu'en (A2.6) , (A2.12,13), il faut simplement remplacer R_j par R_{ij}, c'est-à-dire $x = x_i$, $y = y_i$, α_j par α_{ij} et $\dfrac{\partial R_j}{\partial n_M}$ par $\dfrac{\partial R_{ij}}{\partial n_{P_i}}$

Les formules A2.14 sont données dans le chapitre 3 : formules (3.35).

Remarque.

Il est facile de vérifier sur les formules (A2.14) que si on se limite au premier termes du développement en ondes cylindriques centrées sur P_j , c'est-à-dire : $a_o = a_1 = \dfrac{1}{2\Pi}$, $b_o = b_1 = \dfrac{1}{4}$, $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$, $f_1 = \cos(\Theta_j - \Theta_i)$ et $f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$, nous retrouvons bien la première approximation des $A^{1,2,3,4}_{ij}$ donnée dans le chapitre 3 formules (3.34).

° ° °

Annexe 3

CALCUL DES COEFFICIENTS $A_{\ell\ell}^{5,6,7,8}$.

Soient à calculer :

$$(A.3.1)\qquad A_{\ell\ell}^{5,6,7,8} = (-1)^{0,1} \lim_{M \to P_\ell^-} \ell_{3,4}(M) \int_{\Gamma_\ell} \partial_{n_P}^{0,1} G(\lambda |M-P|)\,dP$$

avec les opérateurs ℓ_3 et ℓ_4 tels que :

$$\ell_3 = -D\,\mathrm{Tr}[\Delta_M - (1-\nu)\partial_{s_M}^2]$$

$$\ell_4 = -D[\mathrm{Tr}\,\partial_{n_M}\Delta + (1-\nu)\partial_{s_{P_\ell^-}}\mathrm{Tr}(\partial_{n_M}\partial_{s_M})]$$

avec

$$\Delta_M = \frac{\partial^2}{\partial n_M^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_M^2}$$

Le calcul des $A_{\ell\ell}^{5,6,7,8}$ fera appel à des résultats connus donnés dans l'annexe 1.

En explicitant (A3.1) il vient :

$$(A3.2)\quad \begin{cases} A_{\ell\ell}^5 = \lim\limits_{M \to P_\ell^-} \ell_3 \int_{\Gamma_\ell} G(\lambda\rho)\,dP = -\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} D\left\{\frac{\partial^2}{\partial s_M^2} + \frac{\partial^2}{\partial n_M^2} - B\frac{\partial^2}{\partial s_M^2}\right\}[I_o(M)] \\ A_{\ell\ell}^6 = -\lim\limits_{M \to P_\ell^-} \ell_3 \int_{\Gamma_\ell} \partial_{n_P} G\,dP = -\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} D\left\{\frac{\partial^2}{\partial s_M^2} + \frac{\partial^2}{\partial n_M^2} - B\frac{\partial^2}{\partial s_M^2}\right\}[I_1(M)] \\ A_{\ell\ell}^7 = \lim\limits_{M \to P_\ell^-} \ell_4 \int_{\Gamma_\ell} G\,dP = -\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} D\left\{\frac{\partial^3}{\partial n_M^3} + \frac{\partial^3}{\partial n_M \partial s_M^2}\right\}[I_o(M)] \\ \quad - DB\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell^-}}\left[\left\{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M}\right\}[I_o(M)]\right] \\ A_{\ell\ell}^8 = \lim\limits_{M \to P_\ell^-} \ell_4 \int_{\Gamma_\ell} \partial_{n_P} G\,dP = -\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} D\left\{\frac{\partial^3}{\partial n_M^3} + \frac{\partial^3}{\partial n_M \partial s_M^2}\right\}[I_1(M)] \\ \quad - DB\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell^-}}\left[\left\{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M}\right\}[I_1(M)]\right] \end{cases}$$

avec $B = 1 - \nu$, $I_o(M)$ et $I_1(M)$ sont donnés par les formules (A1.8) et (A1.9) et les règles de dérivations par les formules (A1.12).

Remarque.

Le calcul de $\partial_s \mathrm{Tr}(\partial_n \partial_s)$ présente certaines difficultés du fait même de la méthode choisie nous y reviendrons plus en détails.

Nous allons exprimer les dérivées successives de $I_o(M)$ et $I_1(M)$ qui entrent dans (A3.2) il vient, en négligeant les termes en h de degré supérieur à 1 :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial n_M^2} I_o(M) \sim \frac{1}{\lambda^3 \Pi} \Big\{ & \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 A_1 \Big[2(y_1 \log v_1 + y_2 \log v_2) - \frac{4}{3}(y_1 + y_2) \\
& + 4h\left(\operatorname{arctg} \frac{y_1}{h} + \operatorname{arctg} \frac{y_2}{h}\right) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{3}\left(\frac{y_1^3}{v_1^2} + \frac{y_2^3}{v_2^2}\right)\Big] + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^7 A_2 \Big[\frac{6}{5}(y_1^5 \log v_1 \\
& + y_2^5 \log v_2) - \frac{32}{175}(y_1^5 + y_2^5) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{7}\left(\frac{y_1^7}{v_1^2} + \frac{y_2^7}{v_2^2}\right)\Big] \\
& + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{11} A_3 \Big[\frac{10}{9}(y_1^9 \log v_1 + y_2^9 \log v_2) - \frac{92}{891}(y_1^9 + y_2^9) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{11}\left(\frac{y_1^{11}}{v_1^2} \right. \\
& \left. + \frac{y_2^{11}}{v_2^2}\right)\Big] + \ldots + 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 \bar{A}_1(y_1 + y_2) + \frac{6}{5}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^7 \bar{A}_2(y_1^5 + y_2^5) + \\
& + \frac{10}{9}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{11} \bar{A}_3(y_1^9 + y_2^9) + \ldots \Big\} + \frac{i}{4}\frac{1}{\lambda^3} \Big\{ -2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 a_2(y_1 + y_2) + \frac{4}{3}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^5 a_3(y_1^3 + y_2^3) \\
& - \frac{6}{5}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^7 a_4(y_1^5 + y_2^5) + \frac{8}{7}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^9 a_5(y_1^7 + y_2^7) - \frac{10}{9}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{11}(y_1^9 + y_2^9) \ldots \Big\}
\end{aligned}
\tag{A3.3}
$$

$$(A3.4)\qquad \frac{\partial^3}{\partial n_M^3} I_o(M) \sim -\frac{1}{\lambda^3 \Pi}\left\{4\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 A_1\left[\operatorname{arctg}\frac{y_1}{h} + \operatorname{arctg}\frac{y_2}{h}\right]\right\}$$

En passant à la limite $h \to 0$, $t \to 0$, c'est-à-dire $y_1 \to \varepsilon_\ell$, $y_2 \to \varepsilon_\ell$, $v_1 \to \frac{\lambda}{2}\varepsilon_\ell$, $v_2 \to \frac{\lambda}{2}\varepsilon_\ell$ il vient en posant $z_\ell = \frac{\lambda e}{2}$:

$$(A3.5)\qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^2}{\partial n_M^2} I_o(M) \sim \frac{\varepsilon_\ell}{2\Pi}\left\{\log z_\ell + \gamma - \frac{3}{2} + \frac{z_\ell^4}{60}\left(\log z_\ell + \gamma - \frac{28}{15}\right) + \frac{z_\ell^8}{25920}\left(\log z_\ell + \gamma - \frac{413}{180}\right) + \ldots\right\} - \frac{i}{4}\frac{\varepsilon_\ell}{2}\left\{1 - \frac{z_\ell^2}{6} + \frac{z_\ell^4}{60} - \frac{z_\ell^6}{1008} + \frac{z_\ell^8}{25920}\ldots\right\}$$

$$(A3.6)\qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^3}{\partial n_M^3} I_o(M) \sim -\frac{1}{2}$$

Remarque.

Compte tenu des résultats (A1.15) et de (A3.5) nous voyons que :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^2}{\partial n_M^2} I_o(M) \equiv \lim_{\substack{n\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M),$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{M\to P_\ell^-} \frac{\partial^2}{\partial n_M^2}\int_{\Gamma_\ell} G(\lambda\rho)\,dP \equiv -\lim_{M\to P_\ell^-} \frac{\partial}{\partial n_M}\int_{\Gamma_\ell} \partial_{n_P} G\,dP$$

il est facile de voir que :

$$(A3.7)\qquad (-1)^{q_1} \lim_{M\to P_\ell^-} \frac{\partial^{p_1}}{\partial n_M^{p_1}}\int_{\Gamma_\ell} \partial_{n_P}^{q_1} G\,dP \equiv (-1)^{q_2} \lim_{M\to P_\ell^-} \frac{\partial^{p_2}}{\partial n_M^{p_2}}\int_{\Gamma_\ell} \partial_{n_P}^{q_2} G\,dP$$

avec $q_1 + p_1 = q_2 + p_2$

Calcul de $\frac{\partial^2}{\partial n_M^2} I_1(M)$.

Compte tenu de (A3.7) :

$$(A3.8)\qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^2}{\partial n_M^2} I_1(M) \equiv \lim_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^3}{\partial n_M^3} I_o(M) \sim -\frac{1}{2}$$

Calcul de $\frac{\partial^3}{\partial n_M^3} I_1(M)$.

$$(A3.9)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial n_M^3} I_1(M) \sim \frac{1}{\Pi\lambda^2} \{ &(\tfrac{\lambda}{2})^2 B_1 [3(\tfrac{\lambda}{2})^2 (\frac{y_1}{v_1^2} + \frac{y_2}{v_2^2}) - 6(\frac{y_1}{y_1^2+h^2} + \frac{y_2}{y_2^2+h^2})] \\ &+ (\tfrac{\lambda}{2})^6 B_2 [\tfrac{3}{5}(\tfrac{\lambda}{2})^2 (\frac{y_1^5}{v_2^2} + \frac{y_2^5}{v_2^2}) + 4(y_1^3 \log v_1 + y_2^3 \log v_2) - \tfrac{14}{15}(y_1^3 + y_2^3)] \\ &+ (\tfrac{\lambda}{2})^{10} B_3 [\tfrac{3}{9}(\tfrac{\lambda}{2})^2 (\frac{y_1^9}{v_1^2} + \frac{y_2^9}{v_2^2}) + \tfrac{24}{7}(y_1^7 \log v_1 + y_2^7 \log v_2) - \tfrac{58}{147}(y_1^7 + y_2^7)] + \dots \\ &+ 4(\tfrac{\lambda}{2})^6 \overline{B}_2 (y_1^3 + y_2^3) + \tfrac{24}{7}(\tfrac{\lambda}{2})^{10} \overline{B}_3 (y_1^7 + y_2^7) + \dots \} \\ &+ \frac{i}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \{ 6(\tfrac{\lambda}{2})^4 b_2 (y_1 + y_2) - 4(\tfrac{\lambda}{2})^6 b_3 (y_1^3 + y_2^3) + \tfrac{18}{5}(\tfrac{\lambda}{2})^8 b_4 (y_1^5 + y_2^5) \\ &- \tfrac{24}{7}(\tfrac{\lambda}{2})^{10} b_5 (y_1^7 + y_2^7) + \dots \} \end{aligned} \right.$$

en passant à la limite :

$$(A3.10)\quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^3}{\partial n_M^3} I_1(M) \sim \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{\Pi} \varepsilon_\ell \{ &-\frac{3}{2} \frac{1}{z_\ell^2} + \frac{z_\ell^2}{6}(\log z_\ell + \gamma - \frac{7}{4}) \\ &+ \frac{z_\ell^6}{1680}(\log z_\ell + \gamma - \frac{1849}{840}) + \dots \} + \frac{i}{4} \frac{\lambda^2}{4} \varepsilon_\ell \{ \frac{3}{2} - \frac{z_\ell^2}{6} + \frac{z_\ell^4}{80} - \frac{z_\ell^6}{1680} \dots \} \end{aligned} \right.$$

Calcul des $\frac{\partial}{\partial s_M} I_o$, $\frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_o$, $\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell}^-} \left[\lim_{\substack{n\to 0 \\ t\to 0}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_o\right]$, $\frac{\partial^2}{\partial s_M^2} I_o$, $\frac{\partial^3}{\partial n_M \partial s_M^2} I_o$.

(A3.11)
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_M} I_o(M) \sim \frac{1}{\Pi\lambda^3} \Big\{ & \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 A_1 \Big[y_1^2 \log v_1 - y_2^2 \log v_2 - \frac{y_1^2 - y_2^2}{3} \\
& + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{3} \left(\frac{y_1^2}{v_1^2} - \frac{y_2^4}{v_2^2} \right) \Big] + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^7 A_2 \Big[y_1^6 \log v_1 - y_2^6 \log v_2 - \frac{y_1^6 - y_2^6}{7} \\
& + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{7} \left(\frac{y_1^8}{v_1^2} - \frac{y_2^8}{v_2^2} \right) \Big] + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{11} A_3 \Big[y_1^{10} \log v_1 - y_2^{10} \log v_2 - \frac{y_1^{10} - y_2^{10}}{11} \\
& + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{11} \left(\frac{y_1^{12}}{v_1^2} - \frac{y_2^{12}}{v_2^2} \right) \Big] + \ldots + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 \bar{A}_1 (y_1^2 - y_2^2) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^7 \bar{A}_2 (y_1^6 - y_2^6) \\
& + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{11} \bar{A}_3 (y_1^{10} - y_2^{10}) + \ldots \Big\} + \frac{1}{\lambda^3} \frac{i}{4} \Big\{ - a_2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 (y_1^2 - y_2^2) \\
& + a_3 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^5 (y_1^4 - y_2^4) - a_4 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^7 (y_1^6 - y_2^6) + a_5 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^9 (y_1^8 - y_2^8) \\
& - a_6 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{11} (y_1^{10} - y_2^{10}) \ldots \Big\}
\end{aligned}
$$

Remarque.

Il est évident que, dans l'expression $\frac{\partial}{\partial n_M} \frac{\partial I_o}{\partial s_M}$ h est en facteur ; il s'ensuit que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_o \sim 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell}^-} \left[\lim_{\substack{h\to 0 \\ t\to 0}} \frac{\partial^2}{\partial s_M \partial n_M} I_o \right] \sim 0$$

$$
(A3.12)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial s_M^2} I_o \sim \dfrac{1}{\Pi\lambda^3}\Big\{\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^3 A_1\Big[2(y_1 \log v_1 + y_2 \log v_2) - \dfrac{2}{3}(y_1 + y_2) + \dfrac{7}{3}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^2 \Big(\dfrac{y_1^3}{v_1^2} + \dfrac{y_2^3}{v_2^2}\Big) \\
\quad - \dfrac{2}{3}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^4 \Big(\dfrac{y_1^5}{v_1^4} + \dfrac{y_2^5}{v_2^4}\Big)\Big] + \Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^7 A_2\Big[6(y_1^5 \log v_1 + y_2^5 \log v_2) + \dfrac{15}{7}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^2 \Big(\dfrac{y_1^7}{v_1^2} + \dfrac{y_2^7}{v_2^2}\Big) \\
\quad - \dfrac{2}{7}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^4 \Big(\dfrac{y_1^9}{v_1^4} + \dfrac{y_2^9}{v_2^4}\Big) - \dfrac{6}{7}(y_1^5 + y_2^5)\Big] + \Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^{11} A_3\Big[10(y_1^9 \log v_1 + y_2^9 \log v_2) \\
\quad - \dfrac{10}{11}(y_1^9 + y_2^9) + \dfrac{23}{11}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^2 \Big(\dfrac{y_1^{11}}{v_1^2} + \dfrac{y_2^{11}}{v_2^2}\Big) - \dfrac{2}{11}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^4 \Big(\dfrac{y_1^{13}}{v_1^4} + \dfrac{y_2^{13}}{v_2^4}\Big)\Big] + \ldots \\
\quad + 2\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^3 \bar{A}_1(y_1 + y_2) + 6\bar{A}_2\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^7 (y_1^5 + y_2^5) + 10\bar{A}_3\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^{11} (y_1^9 + y_2^9) + \ldots\Big\} \\
\quad + \dfrac{i}{4}\dfrac{1}{\lambda^3}\Big\{-2a_2\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^3 (y_1 + y_2) + 4a_3\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^5 (y_1^3 + y_2^3) - 6a_4\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^7 (y_1^5 + y_2^5) \\
\quad + 8a_5\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^9 (y_1^7 + y_2^7) - 10a_6\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^{11} (y_1^9 + y_2^9) + \ldots\Big\}
\end{cases}
$$

Remarque.

Il est évident que, dans l'expression $\dfrac{\partial}{\partial n_M} \dfrac{\partial^2 I_o}{\partial s_M^2}$, h est en facteur ; il s'ensuit que :

$$
(A3.13)\quad \lim_{\substack{h\to 0 \\ r\to 0}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial^2 s_M} I_o \sim 0
$$

En passant à la limite dans (A3.12) il vient :

$$
(A3.14)\quad
\begin{cases}
\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ t\to 0}} \dfrac{\partial^2}{\partial s_M^2} I_o \sim \dfrac{\epsilon_\ell}{2\Pi}\Big\{\log z_\ell + \gamma - \dfrac{1}{2} + \dfrac{z_\ell^4}{12}(\log z_\ell + \gamma - \dfrac{5}{3}) + \dfrac{z_\ell^8}{2880}(\log z_\ell \\
\quad + \gamma - \dfrac{131}{60}) + \ldots\Big\} - \dfrac{i}{4}\dfrac{\epsilon_\ell}{2}\Big\{1 - \dfrac{z_\ell^2}{2} + \dfrac{z_\ell^4}{12} - \dfrac{z_\ell^6}{144} + \dfrac{z_\ell^8}{2880} \ldots\Big\}
\end{cases}
$$

Calcul de $\frac{\partial^2}{\partial s_M^2} I_1$, $\frac{\partial^3}{\partial n_M \partial s_M^2} I_1$.

Remarque.

Le calcul de

$$\frac{\partial}{\partial s_{P_\ell^-}} \left[\lim_{h \to 0} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_1 \right]$$

se fera à part car son interprétation est un peu plus délicate que celle des autres termes.

(A3.15)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I_1}{\partial s_M^2} \sim -\frac{1}{\Pi\lambda^2} \{ (\frac{\lambda}{2})^2 B_1 [3h(\frac{\lambda}{2})^2 (\frac{y_1}{v_1^2} + \frac{y_2}{v_2^2}) - 2h(\frac{\lambda}{2})^4 (\frac{y_1^3}{v_1^4} + \frac{y_2^3}{v_2^4})] \\ \quad + (\frac{\lambda}{2})^6 B_2 [4h(y_1^3 \log v_1 + y_2^3 \log v_2) - \frac{4}{5} h(y_1^3 + y_2^3) + \frac{11}{5} h(\frac{\lambda}{2})^2 (\frac{y_1^5}{v_1^2} + \frac{y_2^5}{v_2^2}) \\ \quad - \frac{2}{5} h(\frac{\lambda}{2})^4 (\frac{y_1^7}{v_1^4} + \frac{y_2^7}{v_2^4})] + (\frac{\lambda}{2})^{10} B_3 [8h(y_1^7 \log v_1 + y_2^7 \log v_2) - \frac{8}{9} h(y_1^7 + y_2^7) \\ \quad + \frac{19}{9} h(\frac{\lambda}{2})^2 (\frac{y_1^9}{v_1^2} + \frac{y_2^9}{v_2^2}) - \frac{2}{9} h(\frac{\lambda}{2})^4 (\frac{y_1^{11}}{v_1^4} + \frac{y_2^{11}}{v_2^4})] + \ldots + 4\bar{B}_2 (\frac{\lambda}{2})^6 h(y_1^3 + y_2^3) \\ \quad + 8\bar{B}_3 (\frac{\lambda}{2})^{10} h(y_1^7 + y_2^7) + \ldots \} + \frac{i}{4} \frac{1}{\lambda^2} \{ -2(\frac{\lambda}{2})^4 b_2 h(y_1 + y_2) \\ \quad + 4(\frac{\lambda}{2})^6 b_3 h(y_1^3 + y_2^3) - 6(\frac{\lambda}{2})^8 b_4 h(y_1^5 + y_2^5) + 8(\frac{\lambda}{2})^{10} b_5 h(y_1^7 + y_2^7) \ldots \} \end{cases}$$

$$
(A3.16)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^3}{\partial n_M \partial s_M^2} I_1(M) \sim \frac{1}{\Pi\lambda^2}\Big\{\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2 B_1\Big[3\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2\Big(\frac{y_1}{v_1^2}+\frac{y_2}{v_2^2}\Big) - 2\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^4\Big(\frac{y_1^3}{v_1^4}+\frac{y_2^3}{v_2^4}\Big)\Big]\\
&\quad + \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^6 B_2\Big[4(y_1^3\log v_1 + y_2^3\log v_2) - \frac{4}{5}(y_1^3+y_2^3) + \frac{11}{5}\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^2\Big(\frac{y_1^5}{v_1^2}+\frac{y_1^5}{v_2^2}\Big)\\
&\quad - \frac{2}{5}\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^4\Big(\frac{y_1^7}{v_1^4}+\frac{y_2^7}{v_2^4}\Big)\Big] + \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^{10} B_3\Big[8(y_1^7\log v_1 + y_2^7\log v_2)\\
&\quad - \frac{8}{9}(y_1^7+y_2^7) + \frac{19}{9}\Big(\frac{y_1^9}{v_1^2}+\frac{y_2^9}{v_2^2}\Big) - \frac{2}{9}\Big(\frac{\lambda}{4}\Big)^4\Big(\frac{y_1^{11}}{v_1^4}+\frac{y_2^{11}}{v^4}\Big)\Big] + \dots\\
&\quad + 4\bar{B}_2\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^6(y_1^3+y_2^3) + 8\bar{B}_3\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^{10}(y_1^7+y_2^7) + \dots\Big\}\\
&\quad + \frac{i}{4}\frac{1}{\lambda^2}\Big\{2\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^4 b_2(y_1+y_2) - 4\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^6 b_3(y_1^3+y_2^3) + 6\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^8 b_4(y_1^5+y_2^5)\\
&\quad - 8\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^{10} b_5(y_1^7+y_2^7)\dots\Big\}
\end{aligned}
\right.
$$

En passant à la limite $M \to P_\ell^-$ dans (A3.15) et (A3.16), c'est-à-dire $h \to 0$, $t \to 0$, il vient :

$$
(A3.17)\quad \lim_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^2 I_1(M)}{\partial s_M^2} \sim 0
$$

$$
(A3.18)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0\\ t\to 0}} \frac{\partial^3}{\partial n_M \partial s_M^2} I_1(M) \sim \frac{\lambda^2}{4}\cdot\frac{\epsilon_\ell}{\Pi}\Big\{\frac{1}{2z_\ell^2} + \frac{z_\ell^2}{6}(\log z_\ell + \gamma - \frac{17}{12})\\
&\quad + \frac{z_\ell^6}{720}(\log z_\ell + \gamma - \frac{256}{105}) + \dots\Big\} + \frac{i}{4}\frac{\lambda^2}{4}\epsilon_\ell\Big\{\frac{1}{2} - \frac{z_\ell^2}{6} + \frac{z_\ell^4}{48} - \frac{z_\ell^6}{720}\dots\Big\}
\end{aligned}
\right.
$$

Calcul de $\lim t\to 0 \ \frac{\partial}{\partial s_{P_o^-}} \ \{\lim_{h\to 0} \ \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} \ I_1(M)\}$.

Faire : lim h → 0 c'est faire tendre le point M vers le point $P_o \in (0, 2\epsilon_\ell)$; ensuite faire tendre t vers 0 c'est faire tendre P_o vers P_ℓ^-.

Nous pouvons directement calculer $\frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_1(M)$, passer à la limite, c'est-à-dire M en P_o et exprimer la dérivée tangente en ce point et faire tendre ensuite $P \to P_\ell^-$. Ou bien, à partir de $\frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)$ faire tendre h vers 0 (M en P_o) et conserver t variable et exprimer la dérivée tangente seconde par une méthode de différences finies, comme il est fait dans les travaux de T.S. Luu [27].

a) Calcul direct.

$$
\left.\begin{aligned}
&\lim h \to 0 \ \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_1(M) \sim \frac{1}{\Pi\lambda^2} \ \{(\tfrac{\lambda}{2})^2 B_1 \log \frac{y_2}{y_1} + (\tfrac{\lambda}{2})^6 B_2 (y_2^4 \log \tfrac{\lambda}{2} y_2 \\
&\quad - y_1^4 \log \tfrac{\lambda}{2} y_1) + (\tfrac{\lambda}{2})^{10} B_3 (y_2^8 \log \tfrac{\lambda}{2} y_2 - y_1^8 \log \tfrac{\lambda}{2} y_1) + \overline{B}_2 (\tfrac{\lambda}{2})^6 (y_2^4 - y_1^4) \\
&\quad + \overline{B}_3 (\tfrac{\lambda}{2})^{10} (y_2^8 + y_1^8) + \ldots \} + \frac{i}{4} \frac{1}{\lambda^2} \{(\tfrac{\lambda}{2})^4 b_2 (y_1^2 - y_2^2) - (\tfrac{\lambda}{2})^6 b_3 (y_1^4 \\
&\quad - y_2^4) + (\tfrac{\lambda}{2})^8 b_4 (y_1^6 - y_2^6) - (\tfrac{\lambda}{2})^{10} b_5 (y_1^8 - y_2^8)\}
\end{aligned}\right\} \quad (A3.19)
$$

En rappelant que $y_1 = \epsilon_\ell + t$ et $y_2 = \epsilon_\ell - t$, on voit que si $t \to \pm \epsilon_\ell$ (A3.19) est infinie aux extrêmités du segment de découpage ; cette quantité est une grandeur physique (assimilable à un moment de torsion) finie. Il semble que cette façon de procéder ne soit pas conforme.

Toutefois prenons la dérivée par rapport à t de (A3.19), il vient :

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s_{P_o}} \{\lim_{h\to 0} \ \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_1(M)\} \sim \frac{1}{\lambda^2 \Pi} \{B_1 (\tfrac{\lambda}{2})^2 (\frac{1}{t+\epsilon} - \frac{1}{t-\epsilon}) + (\tfrac{\lambda}{2})^6 B_2 [4(y_1^3 \log \tfrac{\lambda}{2} y \\
&\quad + y_2^3 \log \tfrac{\lambda}{2} y_2) + y_1^3 + y_2^3] + (\tfrac{\lambda}{2})^{10} B_3 [8(y_1^7 \log \tfrac{\lambda}{2} y_1 + y_2^7 \log \tfrac{\lambda}{2} y_2) + y_1^7 + y_2^7] + \ldots \\
&\quad + 4\overline{B}_2 (\tfrac{\lambda}{2})^6 (y_1^3 + y_2^3) + 8\overline{B}_3 (\tfrac{\lambda}{2})^{10} (y_1^7 + y_2^7) + \ldots \} + \frac{i}{4} \frac{1}{\lambda^2} \{2(\tfrac{\lambda}{2})^4 b_2 (y_1 + y_2) \\
&\quad - 4(\tfrac{\lambda}{2})^6 b_3 (y_1^3 + y_2^3) + 6(\tfrac{\lambda}{2})^8 b_4 (y_1^5 + y_2^5) - 8(\tfrac{\lambda}{2})^{10} b_5 (y_1^7 + y_2^7) \ldots \}
\end{aligned}\right\} \quad (A3.20)
$$

En faisant tendre P_o vers P_ℓ^- c'est-à-dire $t \to 0$ il vient :

$$(A3.21)\quad \left\{ \begin{aligned} \overline{Q} = & \lim t\to 0 \ \frac{\partial}{\partial s_{P_o}} \{\lim h\to 0 \ \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_1(M)\} \sim \frac{\epsilon_\ell}{\Pi} \ \frac{\lambda^2}{4} \{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z_\ell^2} \\ & + \frac{z_\ell^2}{6}(\log z_\ell + \gamma - \frac{17}{12}) + \frac{z_\ell^6}{720}(\log z_\ell + \gamma - \frac{256}{105}) \ldots\} \\ & + \frac{i}{4}\frac{\lambda^2}{4}\epsilon_\ell \{\frac{1}{2} - \frac{z_\ell^2}{6} + \frac{z_\ell^4}{48} - \frac{z_\ell^6}{720} \ldots .\} \end{aligned} \right.$$

Cette façon de procéder conduit, en choisissant la formule (A.3.21), à une erreur par excés sur les résultats numériques et l'erreur est d'autant plus grande que la fréquence est basse.

b) Calcul par la méthode des différences finies.

A partir de la valeur sur $(0, 2\epsilon_\ell)$ de $\lim h \to 0 \ \frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)$, nous calculons la dérivées tangente seconde.

Posons $f(t) = \lim h \to 0 \ \frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)$

$f(t)$ est une fonction continue en t.

Nous prenons comme schéma de dérivation un procédé classique [17].

$$f''(t)_{t=0} = \frac{f'(\epsilon_\ell) - f'(-\epsilon_\ell)}{2\epsilon_\ell} \sim \lim t\to 0 \ \frac{\partial^2}{\partial s_{P_o}^2} \{\lim h\to 0 \ \frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)\}$$

avec :

$$f'(-\epsilon_\ell) = \frac{f(0) - f(-2\epsilon_\ell)}{2\epsilon_\ell}$$

$$f'(\epsilon_\ell) = \frac{f(2\epsilon_\ell) - f(0)}{2\epsilon_\ell}$$

$$(A3.22)\quad f''(t)_{t=0} = \frac{f(2\epsilon_\ell) + f(-2\epsilon_\ell) - 2f(0)}{4\epsilon_\ell^2}$$

$\frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)$ est donné par (A1.14), $f(t)$ vaut alors :

$$
(A3.23)\quad
\begin{cases}
f(t) \sim \dfrac{1}{\Pi\lambda^2}\left\{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 B_1\left(y_1\left(\log\dfrac{\lambda}{2}y_1 - 1\right) + y_2\left(\log\dfrac{\lambda}{2}y_2 - 1\right)\right)\right. \\
\\
+ \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^6 \dfrac{B_2}{5}\left[y_1^5\left(\log\dfrac{\lambda}{2}y_1 - \dfrac{1}{5}\right) + y_2^5\left(\log\dfrac{\lambda}{2}y_2 - \dfrac{1}{5}\right)\right] + \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{10} \dfrac{B_3}{9}\left[y_1^9\left(\log\dfrac{\lambda}{2}y_1 - \right.\right. \\
\\
\left.\left. + y_2^9\left(\log\dfrac{\lambda}{2}y_2 - \dfrac{1}{9}\right)\right] + \ldots\right\} - \dfrac{i}{4\lambda^2}\left\{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 b_1(y_1 + y_2) - \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^4 \dfrac{b_2}{3}\left(y_1^3 + y_2^3\right)\right. \\
\\
\left.\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^6 \dfrac{b_3}{5}\left(y_1^5 + y_2^5\right) - \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^8 \dfrac{b_4}{7}\left(y_1^7 + y_2^7\right) + \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{10} \dfrac{b_5}{9}\left(y_1^9 + y_2^9\right) \ldots\right\}
\end{cases}
$$

En appliquant la formule (A3.22) au résultat (A3.23), il vient :

$$
(A3.24)\quad
\begin{cases}
\widetilde{Q} = \lim t\to 0 \ \dfrac{\partial^2}{\partial s_{P_o}^2}\left\{\lim h\to 0 \ \dfrac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)\right\} \sim \dfrac{\epsilon_\ell}{\Pi}\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{\dfrac{3\log 3}{8z_\ell^2}\right. \\
\\
+ \dfrac{z_\ell^2}{160}\left[81\left(\log 3z_\ell + \gamma - \dfrac{28}{15}\right) - \left(\log z_\ell + \gamma - \dfrac{28}{15}\right)\right] \\
\\
+ \dfrac{z_\ell^6}{69120}\left[6561\left(\log 3z_\ell + \gamma - \dfrac{413}{180}\right) - \left(\log z_\ell + \gamma - \dfrac{413}{180}\right)\right] + \ldots\Big\} \\
\\
\left. + \dfrac{i}{4}\dfrac{\lambda^2}{4}\epsilon_\ell\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{z_\ell^2}{2} + \dfrac{13}{48}z_\ell^4 - \dfrac{41}{432}z_\ell^6 \ldots\right\}\right.
\end{cases}
$$

En choisissant, pour le calcul numérique, la formule (A.3.24) l'erreur est par défaut et est d'autant plus grande que la fréquence est basse.

c) Choix de Q moyenne arithmétique de $\overline{Q}$ et $\widetilde{Q}$.

En choisissant de prendre pour :

$$\lim t\to 0 \ \frac{\partial}{\partial s_{P_o}}\left\{\lim h \to \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial s_M} I_1(M)\right],$$

la moyenne arithmétique entre $\overline{Q}$ et $\widetilde{Q}$, les résultats numériques sont compatibles quelle que soit la fréquence, il vient :

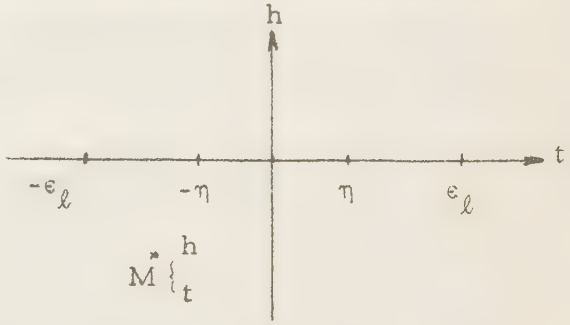
$$
(A3.25)\quad \left\{
\begin{aligned}
Q = \frac{\bar{Q} + \tilde{Q}}{2} \sim \frac{\epsilon_\ell}{\Pi}\frac{\lambda^2}{4}\Big\{ & \frac{1}{4z_\ell^2}\Big(1 + \frac{3\log 3}{4}\Big) + \frac{z_\ell^2}{4}\Big[\frac{1}{3}\Big(\log z_\ell + \gamma - \frac{17}{12}\Big) \\
& + \frac{81}{80}\Big(\log 3z_\ell + \gamma - \frac{28}{15}\Big) - \frac{1}{80}\Big(\log z_\ell + \gamma - \frac{28}{15}\Big)\Big] + \frac{z_\ell^6}{1440}\Big[\log z_\ell + \gamma - \frac{256}{105} \\
& + \frac{2187}{32}\Big(\log 3z_\ell + \gamma - \frac{413}{180}\Big) - \frac{1}{96}\Big(\log z_\ell + \gamma - \frac{413}{180}\Big)\Big] + \frac{i}{4}\frac{\lambda^2}{4}\epsilon_\ell\Big\{\frac{1}{2} \\
& - \frac{z_\ell^2}{3} + \frac{7}{48}z_\ell^4 - \frac{13}{240}z_\ell^6 \ldots\Big\}
\end{aligned}
\right.
$$

Remarque.

On peut donner un essai de justification du choix de Q comme moyenne arithmétique entre $\bar{Q}$ et $\tilde{Q}$.

En effet posons :

$$u(h, t) = \frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)$$



Calculons la dérivée au sens des différences finies pour un paramètre η variable.

$$\frac{\partial}{\partial s_M}\Big(\frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)\Big) \sim \frac{1}{2}\Big\{\frac{u(h, t) - u(h, t - \eta)}{\eta} - \frac{u(h, t + \eta) - u(h, t)}{\eta}\Big\}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)\Big) \sim \frac{u(h, t + \eta) - u(h, t - \eta)}{2\eta}$$

$$\lim h \to 0\ \frac{\partial}{\partial s_M}\Big(\frac{\partial}{\partial n_M} I_1(M)\Big) \sim \frac{u(0, t + \eta) - u(0, t - \eta)}{2\eta}$$

En calculant la dérivée $\frac{\partial}{\partial s P_o}$ il vient :

$$(A3.26)\quad \frac{\partial}{\partial s P_o}\Big\{\lim h \to 0 \frac{\partial^2 I_1(M)}{\partial n_M \partial s_M}\Big\} \sim \frac{u(0, t + 2\eta) + u(0, t - 2\eta) - 2u(0, t)}{4\eta^2}$$

Pour $t \to 0$, c'est-à-dire $P_o \to P_\ell^-$, on retrouve la formule (A3.22), à la différence que η est un paramètre variable.

En prenant les cas extrêmes, c'est-à-dire :

$\eta = 0$

On retrouve $\bar{Q}$, c'est-à-dire l'expression (A3.21), donnant des résultats en fréquences par excès.

$\eta = \epsilon_\ell$.

On retrouve $\widetilde{Q}$, c'est-à-dire l'expression (A3.24), donnant des résultats en fréquences par défaut.

Il paraît donc logique de prendre pour valeur de Q une expression intermédiaire, par exemple :

$$Q = \frac{\widetilde{Q} + \overline{Q}}{2}$$

Sur un exemple numérique de recherche de valeurs propres d'une plaque à bord libre nous donnerons les résultats correspondant à $\overline{Q}$, $\widetilde{Q}$ et Q.

Finalement on trouve, pour les formules (A3.2), à partir des résultats (A3.5), (A3.14), (A3.8), (A3.17), (A3.6), (A3.13), (A3.10), (A3.18) :

$$(A3.27)\begin{cases} A^5_{\ell\ell} \sim -\frac{D\epsilon_\ell}{\Pi}\{\log z_\ell + \gamma - 1 + \frac{z_\ell^4}{20}(\log z_\ell + \gamma - \frac{17}{10}) + \frac{z_\ell^8}{5184}(\log z_\ell - \gamma \\ \quad - \frac{79}{36}) + \ldots - \frac{1-\nu}{2}[\log z_\ell + \gamma - \frac{3}{2} + \frac{z_\ell^4}{60}(\log z_\ell + \gamma - \frac{28}{15}) \\ \quad + \frac{z_\ell^8}{25920}(\log z_\ell + \gamma - \frac{413}{180}) + \ldots]\} + \frac{i}{4} D\epsilon_\ell \{1 - \frac{z_\ell^2}{3} + \frac{z_\ell^4}{20} \\ \quad - \frac{z_\ell^6}{252} + \frac{z_\ell^8}{5184} \cdots - \frac{1-\nu}{2}[1 - \frac{z_\ell^2}{6} + \frac{z_\ell^4}{60} - \frac{z_\ell^6}{1008} + \frac{z_\ell^8}{25920} \cdots]\} \\ A^6_{\ell\ell} \sim \frac{D}{2} \\ A^7_{\ell\ell} \sim \frac{D}{2} \end{cases}$$

$$
(A3.28)\quad
\begin{cases}
\overline{A}^{8}_{\ell\ell} \sim -\dfrac{D\epsilon_\ell}{\Pi}\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{-\dfrac{1}{z_\ell^2}+\dfrac{z_\ell^2}{3}\left(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{19}{12}\right)+\dfrac{z_\ell^6}{504}\left(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{353}{168}\right)\right\} \\
\qquad -\dfrac{i}{4}D\,\epsilon_\ell\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{2-\dfrac{z_\ell^2}{3}+\dfrac{z_\ell^4}{30}-\dfrac{z_\ell^6}{504}\ldots\right\}-D(1-\nu)\,\overline{Q} \\
\widetilde{A}^{8}_{\ell\ell} \sim -\dfrac{D\epsilon_\ell}{\Pi}\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{-\dfrac{1}{z_\ell^2}+\dfrac{z_\ell^2}{3}\left(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{19}{12}\right)+\dfrac{z_\ell^6}{504}\left(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{353}{168}\right)\ldots\right\} \\
\qquad -\dfrac{i}{4}D\epsilon_\ell\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{2-\dfrac{z_\ell^2}{3}+\dfrac{z_\ell^4}{30}-\dfrac{z_\ell^6}{504}\ldots\right\}-D(1-\nu)\widetilde{Q} \\
A^{8}_{\ell\ell} \sim -\dfrac{D\epsilon_\ell}{\Pi}\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{-\dfrac{1}{z_\ell^2}+\dfrac{z_\ell^2}{3}\left(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{19}{12}\right)+\dfrac{z_\ell^6}{504}\left(\log z_\ell+\gamma-\dfrac{353}{168}\right)\ldots\right\} \\
\qquad -\dfrac{i}{4}D\epsilon_\ell\dfrac{\lambda^2}{4}\left\{2-\dfrac{z_\ell^2}{3}+\dfrac{z_\ell^4}{30}-\dfrac{z_\ell^6}{504}\ldots\right\}-D(1-\nu)Q
\end{cases}
$$

Les formules (A3.27) et (A3.28) sont reproduites dans le chapitre 3 : formules (3.36) et (3.37). Les expressions de $\overline{Q}$, $\widetilde{Q}$ et Q sont données par les formules (A3.24) et (A3.25) respectivement.

°°°

Annexe 4

CALCUL DES COEFFICIENTS $A_{ii}^{9,10,11,12}$.

Soient à calculer :

$$(A4.1) \qquad A_{ii}^{9,10,11,12} = \lim_{M \to P_i^-} (-1)^{2,3} \, \ell_{1,2}(M) \int_{\Gamma_i} \delta_{n_P}^{2,3} \, G(\lambda|M - P|)dP$$

Posons :

$$I_2(M) = \int_{\Gamma_i} \delta_{n_P}^2 \, G(\lambda|M - P|)dP$$

$$I_3(M) = -\int_{\Gamma_i} \delta_{n_P}^3 \, G(\lambda|M - P|)dP$$

Compte tenu de la formule (A3.7) de l'annexe 3 et des résultats sur $I_o(M)$ et $I_1(M)$ et de leurs dérivées normales, donnés dans les annexes 1 et 3, on a :

$$\lim_{M \to P_i^-} I_2(M) \equiv \lim_{M \to P_i^-} \frac{\delta^2}{\delta n_M^2} \{I_o(M)\} \qquad \text{voir résultat (A3.5)}$$

$$\lim_{M \to P_i^-} I_3(M) \equiv \lim_{M \to P_i^-} \frac{\delta^3}{\delta n_M^3} \{I_o(M)\} \qquad \text{voir résultat (A3.6)}$$

$$\lim_{M \to P_i^-} \frac{\delta}{\delta n_M} \{I_2(M)\} \equiv \lim_{M \to P_i^-} \frac{\delta^2}{\delta n_M^2} \{I_1(M)\} \qquad \text{voir résultat (A3.8)}$$

$$\lim_{M \to P_i^-} \frac{\delta}{\delta n_M} \{I_3(M)\} \equiv \lim_{M \to P_i^-} \frac{\delta^3}{\delta n_M^3} \{I_1(M)\} \qquad \text{voir résultat (A3.10)}$$

Nous avons finalement pour (A4.1) :

$$(A4.2)\quad \begin{cases} A_{ii}^{9} \sim \lim M \to P_i^- \; I_2(M) \\ A_{ii}^{10} \sim \lim M \to P_i^- \; I_3(M) \\ A_{ii}^{11} \sim \lim M \to P_i^- \; \dfrac{\partial}{\partial n_M} \{I_2(M)\} \\ A_{ii}^{12} \sim \lim M \to P_i^- \; \dfrac{\partial}{\partial n_M} \{I_3(M)\} \end{cases}$$

Les résultats (A4.2) sont donnés au chapitre 3 formules (3.44)

°°°

Annexe 5

PLAQUE CIRCULAIRE : VALEURS DES PARAMETRES INTERVENANT DANS LES FORMULES (3.32), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36.1), (3.36.2), (3.36.3), (3.37), (3.38.1), (3.38.2), (3.38.3), (3.40), (3.44), (3.45), (3.46.1, 2, 3, 4).

1) Potentiels d'ordre 0 et 1 : formules (3.32), (3.33), (3.34), (3.35).

α) Méthode A.

P_j point de coordonnée angulaire $(j - \frac{1}{2})\frac{2\Pi}{n}$

P_i point de coordonnée angulaire $i\frac{2\Pi}{n}$

n nombre de point de découpage du contour

$i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$

$\Theta_j = \varphi_j = (j - \frac{1}{2})\frac{2\Pi}{n}$, $\Theta_i = \varphi_i = i\frac{2\Pi}{n}$

$\rho_{ij} = 2R\left|\sin(j - i - \frac{1}{2})\frac{\Pi}{n}\right|$

R rayon de la plaque circulaire.

$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} = \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} = \left|\sin(j - i - \frac{1}{2})\frac{\Pi}{n}\right|$

$\Gamma_j = \frac{2R\Pi}{n}$

β) Méthode B.

Nous prenons comme contour équivalent un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle de rayon R.

P_j point de coordonnée angulaire $(j - \frac{1}{2})\frac{2\Pi}{n}$

P_i point de coordonnée angulaire $(i - \frac{1}{2})\frac{2\Pi}{n}$

$\Theta_j = \varphi_j = (j - \frac{1}{2})\frac{2\Pi}{n}$, $\Theta_i = \varphi_i = (i - \frac{1}{2})\frac{2\Pi}{n}$

$\rho_{ij} = 2R\cos\frac{\Pi}{n}\left|\sin(j - i)\frac{\Pi}{n}\right|$

$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} = \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} = \left|\sin(j - i)\frac{\Pi}{n}\right|$

ϵ_j (ou ϵ_i) $= R\sin\frac{\Pi}{n}$

$i = 1, 2, \ldots, n \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$

γ) Méthode C.

P_j , P_i , Θ_j , Θ_i , ϵ_j (ou ϵ_i) ont les mêmes valeurs que dans le paragraphe β.

$$R_{ij} = 2R \cos \frac{\Pi}{n} \left| \sin(j - i) \frac{\Pi}{n} \right|$$

$$\alpha_{ij} = \Pi - (j - i) \frac{\Pi}{n}$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial n_{P_i}} = \left| \sin(j - i) \frac{\Pi}{n} \right|$$

2°) Potentiels d'ordre 2 et 3 : formules (3.44) et (3.45).

formules (3.44) : $\epsilon_i = R \sin \frac{\Pi}{n}$

formules (3.45.1, 2, 3) : P_j , P_i , Θ_j , Θ_i , φ_j , φ_i , ρ_{ij} , $\frac{\partial \rho_{ij}}{\rho n_{P_j}}$, $\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}}$

ont les mêmes valeurs que dans le paragraphe β.

formule (3.45.4) :

P_j point de coordonnée angulaire $j \frac{2\Pi}{n}$

$P_{j-1/2}$ point de coordonnée angulaire $(j - \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{n}$

P_{j-1} point de coordonnée angulaire $(j - 1) \frac{2\Pi}{n}$

P_i point de coordonnée angulaire $(i - \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{n}$

$$\Theta_{j-1} = \Theta_{j-1/2} = \Theta_j = (j - \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{n} \quad , \quad \Theta_i = (i - \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{n}$$

$$\varphi_j = j \frac{2\Pi}{n}$$

$$\varphi_{j-1/2} = (j - \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{n}$$

$$\varphi_{j-1} = (j - 1) \frac{2\Pi}{n}$$

$$\varphi_i = (i - \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{n}$$

$$\rho_{ij} = R \left[1 + \cos \frac{2\Pi}{n} - 2 \cos \frac{\Pi}{n} \cos(j - i + \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{n} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_{ij-1/2} = 2R \cos \frac{\Pi}{n} \left| \sin(j - i) \frac{\Pi}{n} \right|$$

$$\rho_{ij-1} = R\left[1 + \cos\frac{2\Pi}{n} - 2\cos\frac{\Pi}{n}\cos\left(j - i - \frac{1}{2}\right)\frac{2\Pi}{n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} = R\cos\frac{\Pi}{n}\cdot\frac{1 - \cos(j-i)\frac{2\Pi}{n}}{\rho_{ij}}$$

$$\frac{\partial\rho_{ij-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j-\frac{1}{2}}}} = \left|\sin(j-i)\frac{\Pi}{n}\right|$$

$$\frac{\partial\rho_{ij-1}}{\partial n_{P_{j-1}}} = R\cos\frac{\Pi}{n}\cdot\frac{1-\cos(j-i)\frac{2\Pi}{n}}{\rho_{ij-1}}$$

$$\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} = R\,\frac{\cos\frac{\Pi}{n} - \cos\left(j - i + \frac{1}{2}\right)\frac{2\Pi}{n}}{\rho_{ij}}$$

$$\frac{\partial\rho_{ij-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_i}} = \left|\sin(j-i)\frac{\Pi}{n}\right|$$

$$\frac{\partial\rho_{ij-1}}{\partial n_{P_i}} = R.\,\frac{\cos\frac{\Pi}{n} - \cos\left(j - i + \frac{1}{2}\right)\frac{2\Pi}{n}}{\rho_{ij-1}}$$

3°) Potentiels d'ordre 0 et 1 : formules (3.33.1, 2), (3.36.1, 2), (3.34.1, 2), et (3.38.1, 2).

$$P_j,\ P_i,\ \Theta_j,\ \Theta_i,\ \varphi_j,\ \varphi_i,\ \rho_{ij},\ \frac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}},\ \frac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}}$$

ont les mêmes valeurs que dans le paragraphe β.

$$\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial s_{P_i}} = -R\cos\frac{\Pi}{n}\,\frac{\sin(j-i)\frac{2\Pi}{n}}{\rho_{ij}}$$

4°) Potentiels d'ordre 0 et 1 : formules (3.36.1, 2, 3), (3.37.1, 2, 3), (3.38.1, 2, 3) et (3.40).

formules (3.36.1, 2,3) et (3.37.1, 2, 3) : $\epsilon_i = R\sin\frac{\Pi}{n}$

formules (3.38.1, 2, 3) :

$$P_j,\ P_i,\ \Theta_j,\ \Theta_i,\ \varphi_j,\ \varphi_i,\ \frac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_j}},\ \frac{\partial\rho_{ij}}{\partial n_{P_i}},\ \frac{\partial\rho_{ij}}{\partial s_{P_i}}$$

ont les mêmes valeurs que dans le paragraphe 3.

formule (3.40).

$$P_j\ ,\ P_{j-\frac{1}{2}}\ ,\ P_{j-1}\ ,\ \Theta_j\ ,\ \Theta_i\ ,\ \varphi_j\ ,\ \varphi_{j-\frac{1}{2}}\ ,\ \varphi_{j-1}\ ,\ \rho_{ij}\ ,\ \rho_{ij-\frac{1}{2}}\ ,\ \rho_{ij-1}$$

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}}\ ,\ \frac{\partial \rho_{ij-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_{j-\frac{1}{2}}}}\ ,\ \frac{\partial \rho_{ij-1}}{\partial n_{P_{j-1}}}\ ,\ \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}}\ ,\ \frac{\partial \rho_{ij-\frac{1}{2}}}{\partial n_{P_i}}\ ,\ \frac{\partial \rho_{ij-1}}{\partial n_{P_i}}$$

ont mêmes valeurs que dans le paragraphe 2.

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial s_{P_i}} = -\ R.\ \frac{\sin(j-i+\frac{1}{2})\frac{2\Pi}{n}}{\rho_{ij}}$$

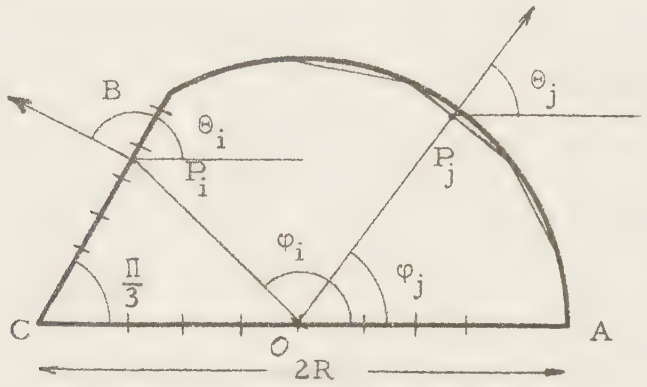
$$\frac{\partial \rho_{ij-\frac{1}{2}}}{\partial s_{P_i}} = -\ R\cos\frac{\Pi}{n}\ .\ \frac{\sin(j-i)\frac{2\Pi}{n}}{\rho_{ij-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial \rho_{ij-1}}{\partial s_{P_i}} = -\ R\ .\ \frac{\sin(j-i-\frac{1}{2})\frac{2\Pi}{n}}{\rho_{ij-1}}$$

°°°

Annexe 6

PLAQUE DE FORME QUELCONQUE ENCASTREE EVALUATIONS DES GRANDEURS INTERVENANT DANS LES FORMULES (3.33) et (3.34).



Il s'agit d'évaluer pour toutes les positions de P_i et P_j :

$$\rho_{ij} = \left[\overline{0P_i}^2 + \overline{0P_j}^2 - 2\overline{0P_i}\ \overline{0P_j}\cos(\varphi_j - \varphi_i)\right]^{1/2}$$

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_j}} = \frac{\overline{0P_j}\cos(\varphi_i - \Theta_j) - \overline{0P_i}\cos(\varphi_i - \Theta_j)}{\rho_{ij}}$$

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial n_{P_i}} = \frac{\overline{0P_i}\cos(\varphi_i - \Theta_i) - \overline{0P_j}\cos(\varphi_j - \Theta_i)}{\rho_{ij}}$$

AB est approché par une ligne polygonale régulière de n_1 côtés de longueur $2\varepsilon_j = 2R\frac{\Pi}{P}$ (P étant le nombre de côtés du polygone régulier).

BC est découpé en n_2 morceaux de longueur $2\varepsilon_j = \frac{R}{n_2}$ de même pour B0 et 0A.

n_2 est tel que $\frac{R}{n_2} \sim 2R \sin\frac{\Pi}{P}$.

le nombre de points de découpage est $n = n_1 + 3n_2$.

Posons :

$n_3 = n_1 + n_2$

$n_4 = n_1 + 2n_2$

Nous devons examiner les cas suivants :

a) Si $i \leq n_1$ et $j \leq n_1$.

$$0P_i = 0P_j = R \cos \frac{\Pi}{P}$$

$$\cos(\varphi_j - \varphi_i) = \cos(j - i) \frac{2\Pi}{n}$$

$$\epsilon_i = R \sin \frac{\Pi}{P} \quad , \quad \epsilon_j = R \sin \frac{\Pi}{P}$$

b) Si $i \leq n_1$ et $n_1 < j \leq n_3$.

$$0P_j = \frac{R}{n_2} \left[n_2^2 + (n_3 - j + \frac{1}{2}) (n_1 - j + \frac{1}{2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$0P_i = R \cos \frac{\Pi}{P}$$

$$\cos \varphi_j = \frac{R}{2n_2} \frac{1}{0P_j} (n_1 - n_2 - j + \frac{1}{2})$$

$$\sin \varphi_j = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{n_2} \cdot \frac{1}{0P_j} (n_3 - j + \frac{1}{2})$$

$$\Theta_j = \frac{5\Pi}{6}$$

$$\varphi_i = (i - \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{P}$$

$$\Theta_i = \varphi_i$$

$$\epsilon_j = \frac{R}{2n_2} \quad , \quad \epsilon_i = R \sin \frac{\Pi}{P}$$

c) $n_3 < j \leq n_4$, $i < n_1$.

$$0P_j = \frac{R}{n_2} (n_4 - j + \frac{1}{2}) \ , \ 0P_i = R \cos \frac{\Pi}{P}$$

$$\varphi_j = \Pi \quad , \quad \varphi_i = (i - \frac{1}{2}) \frac{2\Pi}{P}$$

$$\Theta_j = \frac{3\Pi}{2} \quad , \quad \Theta_i = \varphi_i$$

$$\epsilon_j = \frac{R}{2n_2} \ , \quad \epsilon_i = R \sin \frac{\Pi}{P}$$

d) $n_4 < j \leq n$, $i \leq n_1$.

$$OP_j = \frac{R}{n_2}\left(j - \frac{1}{2} - n_4\right), \quad OP_i = R\cos\frac{\Pi}{P}$$

$$\varphi_j = 0 \quad , \quad \varphi_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{2\Pi}{P}$$

$$\Theta_j = \frac{3\Pi}{2} \quad , \quad \Theta_i = \varphi_i$$

$$\epsilon_j = \frac{R}{2n_2} \quad , \quad \epsilon_i = R\sin\frac{\Pi}{P}$$

e) Si $j \leq n_1$, $n_1 < i \leq n_2$.

Mêmes résultats qu'en b en permutant i et j.

Les autres résultats sont obtenus par permutation de i et j comme ci-dessus.

°°°

" Vu et permis d'imprimer
Marseille, le 17 novembre 1972

Le Président,

F.BOREL

C.MOYNAULT

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arthur W.LEISSA.
"Vibration of plates".
1969 NASA SP - 160.

[2] J.VIVOLI.
"Mise en équation et conditions aux limites pour les problèmes de plaque".
7ème Congrés International d'Acoustique. Budapest 1971.

[3] Y.JULLIEN.
"Vibrations des systèmes élastiques".
Edition N.E.B. Paris 1971.

[4] J.KURLANDZKI.
"Mathematical formulation of a certain method for solving boundary problems or mechanics".
Proceeding of Vibration Problems, 2-5, p.117 - 123. 1964.

[5] J.L.LIONS - E.MAGENES.
"Problèmes aux limites non homogènes".
Tome 1 - Dunod - Paris - 1968.

[6] J.L.LIONS.
"Sur les problèmes aux limites du type dérivées obliques".
Ann. of Math. 64 - p.207-239, - 1969.

[7] G.PULVIRENTI.
"Su una classe di problemi ai limiti" .
Le Matematiche - 20, p.87-99 - 1965.

[8] E.MAGENES - G.STAMPACCHIA.
"I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico".
Ann. Sc. Norm. Sup. - Pisa, 12, p.247-357 - 1958.

[9] P.FILIPPI.
"Théorie de la diffraction et équations intégrales".
Séminaire de théorie de la diffraction, 1969-1970, Note C.R.P. 1136, 1970.

[10] P.FILIPPI, J.VIVOLI.
"Vibrations de plaques et potentiels de couches".
Note C.R.P. n°1124 - 1970.

[11] P.FILIPPI - J.VIVOLI.
"Vibration de plaques minces : résolution à l'aide de potentiel de couches".
C.R.Acad.Sci., A, t.272, p.896-899, 1971.

[12] P.FILIPPI - J.VIVOLI.
"Vibration de plaques minces : résolution à l'aide de potentiels de couches".
7ème Congrés International d'Acoustique, Budapest, 1971.

[13] L.SCHWARTZ.
"Théorie des distributions".
Herman, Paris - 1966.

[14] V.V.GRUSIN.
Ame.Math.Soc.Transl., 51, p.82-112, 1966.

[15] I.N.VEKUA.
"New methods for solving elliptic equations".
North-Holland Publishing Compagny. Amsterdam - 1968.

[16] F.CASSOT.
"Contribution à l'étude de la diffraction par un écran mince".
Thèse de 3ème cycle, Marseille 1971.

[17] L.COLLATZ.
"The numerical treatment of differential equations".
Springer-Verlag Berlin Heidelberg - New-York - 1966.

[18] J.VIVOLI.
"Vibrations de plaques de forme quelconques et potentiels de couches".
C.R.Acad.Sci. A - 274, n°12, p.993-6 , 1972.

[19] J.VIVOLI.
"Vibrations de plaques et potentiels de couches".
Acustica, 26, n°6, 1972

[20] Y.JULLIEN - J.VIVOLI.
"Problèmes aux limites du quatrième ordre avec conditions aux limites discontinues : Applications aux vibrations transversales de plaques".
Actes du congrés de mécanique appliquée, Bucarest 1969, Rev. Roumaine. Sciences, techn. mécanique appliquée, n°6 - p.1285-97, Bucarest, 1970.

[21] W.NOWACKI - Z.OLESIAK.
"Vibration, Buckling, and Bending of a Circular Plate Clamped Along Part of its Periphery and Simply Supported on the Remaining Part".
Bul. Acad. Pol. Sci. IV, Vol.4, n°4, p.247-58 , 1956.

[22] W.NOWACKI - Z.OLESIAK.
"The problem of a circular Plate Partially Clamped ans Partially Supported Along the Periphery".
Arch.Mech.Stoc. Vol.8, p.233-255 , 1956.

[23] C.C.BARTLETT.
"The vibration and Buckling of a Circular Plate Clamped on Part of its Boundary and Simply Supported on the Remainder".
Quart.J.Mech.Appl.Math, vol.16, pt.4, p.431-40 - 1963.

[24] St.BERGMAN.
"Integral operators in the theory of linear partial differential equations".
Springer Verlag Berlin - Heidelberg - New-York, 1969.

[25] H.SAADAT.
"Etude des vibrations d'une plaque mince couplée avec un fluide".
Thèse, Marseille, n° d'ordre A07205 - 1972.

[26] M.ABRAMOWITZ - I.A.STEGUN.
"Hand book of Mathematical functions".
National Bureau of Standard Applied Mathematics, Série 55 - 1964.

[27] T.S.LUU.
"Sur la technique de singularités en hydro et aérodynamique".
Journées sur : l'Application des potentiels de couches à la mécanique et à la théorie de la diffraction".
Novembre 1971, note C.R.P. n°1218 - 1971

°°°